序 贯 分 析

陈 家 鼎

北 京 大 学 出 版 社

新登字(京)159号

书　　　名：序贯分析
著作责任者：陈家鼎
责 任 编 辑：王明舟
标 准 书 号：ISBN 7-301-00210-6/O・41
出　版　者：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　　话：出版部 2502015　发行部 2559712　编辑部 2502032
排　印　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850×1168毫米　32开本　12印张　300千字
1995年5月第一版　1995年5月第一次印刷
印　　　数：0001—3,000册
定　　　价：15.00元

序　　言

序贯分析是数理统计学的重要分支之一．序贯分析的特点是，在研究决策问题（统计推断或选择）时，不是预先固定样本量（观察数目），而是逐次取样（观察），直到样本提供足够的信息，能恰当地做出决策为止．一句话，样本量是随机变量．自从A.Wald的奠基性著作“Sequential analysis”(1947)问世以来，序贯分析的研究范围越来越大，各方面都有较大的发展．近三十年来，不断有序贯分析的专门著作出版：

① G. B. Wetherill, Sequential methods in statistics(1966年初版，1986年第三版)．

② B.K. Ghosh, Sequential tests of statistical hypothesis (1970)．

③ Z. Govindarajulu, Sequential statistical procedures (1975年初版，1981年第二版)．

④ A.H. ШИРЯЕВ, Статистический последовательный анализ (1969年第一版，1976年第二版)．

⑤ D. Siegmund, Sequential analysis (1985)．

⑥ B.K. Ghosh and P.K. Sen, Handbook of sequential analysis (1991)．

这些书涉及的面广，内容丰富，各有特点，都很值得读．但若用作概率统计专业研究生的入门教材，却不很合适．著者冒昧发表意见，供读者参考．Wald的上述名著思想深邃，启发性强，反映了序贯分析创始人的杰出成就，但离序贯分析的现状有较大距离；Wetherill的书讲了许多序贯方法，注重实用，但没有系统讲述序贯分析的数学理论，大部分结论都没有证明；Ghosh的书

对假设检验讲得很详细，把 1970 年以前的有关理论概括了进去，但未讲序贯分析的其它方面；Govindarajulu 的书篇幅很大，收集了丰富的材料，摘引了大量的文献，但未作系统的论述，很多定理都未证明，读者难以通读；ШИРЯЕВ 的书写得很清楚，数学上很严格，体现了苏联概率论学派的特点，但内容主要是叙述马尔可夫过程的最优停止理论，对序贯统计未作全面的论述；Siegmund 是有名的序贯分析专家，他的书实际上是总结他在序贯分析领域取得的研究成果，内容过于专门，不是对序贯分析作全面介绍。Ghosh 和 Sen 合作编辑的手册内容丰富，对序贯分析的二十七个专题分别进行了比较系统的介绍，概述了这些专题从开始出现到九十年代初的发展史与主要结果，执笔者又都是各方面的知名专家。这是一本极有价值的参考书，对于具有一定基础的读者，不难从中了解到所关心的专题的状况。由于是手册，这本书的绝大部分定理都未叙述证明。

对于初学者来说，很需要一本系统论述序贯分析的基础理论、能够反映序贯分析现代发展特点又便于学习的教本。从1984年起，著者多次给北京大学概率统计专业研究生讲授"序贯分析"课。本书就是在讲稿的基础上进行修改、扩充而成的，力图系统论述这个领域里最基本的理论，对序贯分析的几个主要方面进行较全面的介绍，十分注意定理叙述的准确性与证明的完备性。本书包括了著者的部分研究成果，其中一些系首次发表。应该说明的是，这本书是研究生用的教材，是基础读物，不是总结序贯分析各方面进展的专著。

全书共分五章：最优停止理论，序贯假设检验，序贯估计，贝叶斯序贯统计判决，序贯选择。在第五章的写作过程中，孙嘉阳同志给著者很大帮助。

阅读本书要求读者学过测度论与概率论基础，并对数理统计有一定了解。

由于著者学识浅薄、水平有限，本书肯定会有不少错误或不

当之处，欢迎专家和读者批评指正。

陈家鼎

初稿完成于1986年5月

修改稿完成于1992年7月

目　录

第一章　最优停止理论

§1　随机序列与停时

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间，其中Ω是所有基本事件组成的非空集，$\mathscr{F}$是由Ω的一些子集(随机事件)组成的σ代数，P是$\mathscr{F}$上的概率测度。记$I=\{0,1,2,\cdots\}$(全体非负整数)，$\bar{I}=I\cup\{\infty\}$，$\{\mathscr{F}_n,n\in I\}$是$\mathscr{F}$的一族子σ代数，$\mathscr{F}_n\subset\mathscr{F}_{n+1}$（一切$n\geqslant0$)。

定义1.1　称随机变量列$\{X_n,n\in I\}$关于$\{\mathscr{F}_n\}$是适应的，若对一切$n\in I$，X_n是$\mathscr{F}_n$可测的。此时也称$(X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant0)$是随机序列。

记$\sigma(X_0,\cdots,X_n)$为使得$X_0,\cdots,X_n$都可测的最小σ代数。当然，$(X_n,\sigma(X_0,\cdots,X_n),n\geqslant0)$是随机序列。

集合I看成是离散时间参数时，$\mathscr{F}_n$可理解为到时刻n为止能够观察到(或能掌握)的事件的全体，$\sigma(X_0,\cdots,X_n)$可理解为根据$X_0,\cdots,X_n$的观测值能够确定发生与否的随机事件的全体。

定义1.2　称$\bar{I}$中取值的随机变量$\tau=\tau(\omega)$是关于$\{\mathscr{F}_n\}$的停止时间(又称马尔可夫时间，停止变量，不依赖于将来的随机变量，简称停时)，若对一切$n\in I$，

$$\{\omega:\ \tau(\omega)=n\}\in\mathscr{F}_n。\tag{1.1}$$

注意：停时τ允许取值∞。条件(1.1)的含义是，变量τ是否等于n只依赖于到时刻n为止所能掌握的“信息”，而与未来的(即时刻n以后的)情况无关。

在不会引起误会的情况下，“关于$\{\mathscr{F}_n\}$的停止时间”简称为“停时”。当$\mathscr{F}_n=\sigma(X_0,\cdots,X_n)(n\geqslant0)$时，也称停时为序列

$(X_n, n\geqslant 0)$的停时。

定义1.3 称停时 τ 是有限的，若 $P(\tau<\infty)=1$。有限停时也称停止法则。

例1.1 设$(X_n, n\geqslant 0)$是随机变量列，B 是任何一维 Borel 集。令

$$\tau(\omega)=\inf\{n:\ n\geqslant 0, X_n(\omega)\in B\}$$

（我们恒约定 $\inf\varnothing=\infty$），则 $\tau(\omega)$ 是$(X_n, n\geqslant 0)$的停时。

例1.2 设 $y_0, y_1, \cdots$是相互独立同分布的随机变量列，y_i 取值 1 或 −1，$P(y_i=1)=p$。令

$$\tau=\inf\left\{n:\ n\geqslant 0, \sum_{i=0}^{n} y_i=1\right\},$$

则 τ 是$\{y_i, i\geqslant 0\}$的停时。当$p>\frac{1}{2}$时，从强大数律知 τ 是有限的；当 $p=\frac{1}{2}$ 时，也可以证明 τ 是有限的（利用第二章§3中的Chung-Fuchs 定理即知）。

对任何随机序列$(X_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0)$和停时 τ，规定：

$$X_\infty(\omega)=\overline{\lim_n} X_n(\omega),\quad \mathscr{F}_\infty=\sigma\left(\bigcup_{n\geqslant 0}\mathscr{F}_n\right),$$

$$X_\tau=X_{\tau(\omega)}(\omega),$$

$$\mathscr{F}_\tau=\{A:\ A\in\mathscr{F}_\infty, \text{对一切 } n\geqslant 0, A\cap\{\tau=n\}\in\mathscr{F}_n\}.$$

这里，$\mathscr{F}_\infty$ 是包含诸 $\mathscr{F}_n$ 的最小 σ 代数。很容易验证，$\mathscr{F}_\tau$ 是 σ 代数，X_τ 是 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的。$\mathscr{F}_\tau$ 的意义是：到时刻 τ 为止能够观察到（或能掌握）的事件的全体。当 $\tau\equiv n$ 时，易知 $\mathscr{F}_\tau=\mathscr{F}_n$。我们恒用 I_A 表示A的示性函数，即

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A,\\ 0, & \omega\notin A.\end{cases}$$

定理1.1 设 $\tau, \eta, \tau_k (k\geqslant 1)$都是停时，则有下列结论：

① $\inf_k \tau_k$，$\sup_k \tau_k$ 都是停时；

② 若 $A \in \mathscr{F}_\tau$，则 $A \cap \{\tau \leqslant \eta\} \in \mathscr{F}_\eta$，$A \cap \{\tau = \eta\} \in \mathscr{F}_\tau$；

③ 若 $\tau \leqslant \eta$，则 $\mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{F}_\eta$；

④ 若 $A \in \mathscr{F}_\tau$，$\tau_A \triangleq \tau \cdot I_A + \infty \cdot I_{A^c}$，则 τ_A 是停时。

证明 很容易，从略。

我们恒用 E 表示数学期望符号，约定 $\sup\varnothing = -\infty$。设 $(X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0)$ 是随机序列，令

$$C = \{\tau: \tau \text{ 是}\{\mathscr{F}_n\}\text{停止时间，且 } EX_\tau \text{ 存在}\},$$
$$V = \sup\{EX_\tau: \tau \in C\}.$$

定义1.4 称停时 τ^* 是最优的，若 $EX_{\tau^*} = V$。

以后将会看到，许多实际问题和理论问题都可化为寻求最优停时问题。

最优停止理论主要关心下列三个问题：

1）最优停时是否存在？

2）如果最优停时存在，如何具体求出？

3）如果最优停时存在，是否只有一个？

为了理解上述提法的具体意义，我们可以这样设想，若 $y_0, y_1, \cdots$ 是可观测的序列(随机变量列)，$\varphi_n(u_0, \cdots, u_n)$ 是 Borel 函数 $(n \geqslant 0)$，$X_n = \varphi_n(y_0, \cdots, y_n)$ 是观测了头 $n+1$ 值后停止所得到的报酬，记 $\mathscr{F}_n = \sigma(y_0, \cdots, y_n)(n \geqslant 0)$。最优停时 τ^* 就是使得平均报酬达到最大的停止观测的时刻。

由于有这样的具体解释，$(X_n, n \geqslant 0)$ 常叫做报酬序列。

对上述三个问题，现代已有很多研究。经过 J.L.Snell(1952)、Chow–Robbins–Siegmund (1971)、Е.Б.ДЫНКИН (1963)及 A·H.ШИРЯЕВ (1976)等人的努力，已形成系统的理论。本章就是这个理论的主要部分。为了便于学习，我们先讨论有限时间内的最优停止，然后再论述无穷随机序列的最优停止。

我们还要声明一下，本章只叙述离散时间参数的最优停止理论。至于连续时间参数的随机过程的最优停止理论，从 1970 年

以来也有许多研究，请读者参看ФАДЕЕВ (1970)，Thompson (1971)和赵彭亮(1987)。其中赵的结果最完善，清楚地表明本章所叙述的理论基本上都可推广至连续时间参数情形。

§2 有限时间内的最优停止

设$\{X_n, 1\leqslant n\leqslant N\}$是$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机序列，这里$N$是正整数。$\mathscr{F}_n$是$\mathscr{F}$的子$\sigma$代数，$\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2\subset\cdots\subset\mathscr{F}_N$。$X_n$是$\mathscr{F}_n$可测的$(n\geqslant 1)$。与§1中的定义相类似，称$\tau=\tau(\omega)$是关于$\{\mathscr{F}_n\}$的停时(简称停时)，若$\tau$取值于$\{1,2,\cdots,N\}$，且有

$$\{\tau=n\}\in\mathscr{F}_n (1\leqslant n\leqslant N).$$

所有停时的集合记作$\mathscr{M}$。称停时τ^*是最优的，若

$$EX_{\tau^*}=\sup\{EX_\tau;\ \tau\in\mathscr{M} \text{ 且 } EX_\tau \text{ 存在}\}.$$

与§1中一样，可提出下列三个问题：

1) 最优停时是否存在？

2) 如果最优停时存在，如何具体求出？

3) 如果最优停时存在，是否只有一个？

我们将在本节证明，在条件$EX_i^+<\infty (i=1,\cdots,N)$下，最优停时永远存在，而且有具体办法(后退归纳法)求解；最优停时有时不止一个，但可给出"唯一性"成立的充要条件。下一节将用本节的理论彻底解决著名的秘书问题。

我们恒设$EX_i^+<\infty$ $(i=1,\cdots,N)$。现在引入下列极重要的量。

$$\gamma_N=X_N,$$
$$\gamma_n=\max(X_n, E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)) \quad (n=N-1,\cdots,2,1),$$

这样$\{\gamma_n, 1\leqslant n\leqslant N\}$就由后退归纳法确定出。这里$E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)$是条件期望。

记

$$\mathscr{M}(k,N)=\{\tau;\ \tau\in\mathscr{M}, k\leqslant\tau\leqslant N\} \quad (k\leqslant N).$$

引理2.1 固定 $k(1\leqslant k\leqslant N)$，则对任何 $\tau\in\mathscr{M}(k,N)$，有

$$E(X_\tau|\mathscr{F}_k)\leqslant\gamma_k \ \text{(a.s.)}, \tag{2.1}$$

$$EX_\tau\leqslant E\gamma_k. \tag{2.2}$$

证明 我们用后退归纳法证明(2.1)。显然，$k=N$ 时(2.1)成立。设 $k=i\ (2\leqslant i\leqslant N)$时(2.1)成立，则对任何 $\tau\in\mathscr{M}(i-1,N)$，有

$$\begin{aligned}E(x_\tau|\mathscr{F}_{i-1})&=E(I_{\{\tau=i-1\}}X_{i-1}|\mathscr{F}_{i-1})+E(I_{\{\tau\geqslant i\}}X_\tau|\mathscr{F}_{i-1})\\&=I_{\{\tau=i-1\}}X_{i-1}+I_{\{\tau\geqslant i\}}E(X_{\tau\vee i}|\mathscr{F}_{i-1})\ \text{(a.s.)},\end{aligned}$$

这里 $\tau\vee i=\max(\tau,i)\in\mathscr{M}(i,N)$。依归纳法假设知

$$E(X_{\tau\vee i}|\mathscr{F}_i)\leqslant\gamma_i\ \text{(a.s.)}.$$

故

$$E(X_\tau/\mathscr{F}_{i-1})\leqslant\max(X_{i-1},E(\gamma_i/\mathscr{F}_{i-1})=\gamma_{i-1}\ \text{(a.s.)},$$

可见对于 $k=i-1$，(2.1)也是成立的。这就证明了(2.1)对一切 k 成立。(2.2)由(2.1)直接推出。证毕。

定理2.1 设 $EX_k^+<\infty\ (k=1,\cdots,N)$，且

$$\sigma_i=\min\{k:\ i\leqslant k\leqslant N,\gamma_k=X_k\}(1\leqslant i\leqslant N),$$

则

$$EX_{\sigma_i}=\sup\{EX_\tau:\ \tau\in\mathscr{M}(i,N)\},$$

从而 σ_1 是最优停时。

证明 从引理2.1知，只须证 $EX_{\sigma_i}=E\gamma_i$。不难看出，

$$\begin{aligned}E\gamma_i&=\int_{\{\sigma_i=i\}}\gamma_i\mathrm{d}P+\int_{\{\sigma_i>i\}}\gamma_i\mathrm{d}P\\&=\int_{\{\sigma_i=i\}}X_i\mathrm{d}P+\int_{\{\sigma_i>i\}}\gamma_{i+1}\mathrm{d}P\\&=\int_{\{\sigma_i=i\}}X_i\mathrm{d}P+\int_{\{\sigma_i\geqslant i+1\}}\gamma_{i+1}\mathrm{d}P\end{aligned}$$

$$+\int_{\{\sigma_i > i+1\}} \gamma_{i+1} \mathrm{d}P = \cdots$$

$$= \int_{\{\sigma_i = i\}} X_i \mathrm{d}P + \cdots + \int_{\{\sigma_i = N-1\}} X_{N-1} \mathrm{d}P$$

$$+ \int_{\{\sigma_i > N-1\}} \gamma_N \mathrm{d}P$$

$$= EX_{\sigma_i}.$$

证毕。

系2.1 在定理 2.1 的假设下，有

$$E(X_{\sigma_i}/\mathscr{F}_i) = \gamma_i \quad (\text{a.s.}), \quad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

证明 利用定理 2.1 的证明方法，不难知道：对任何 $A \in \mathscr{F}_i$，

$$\int_A \gamma_i \mathrm{d}P = \int_A X_{\sigma_i} \mathrm{d}P.$$

这表明系 2.1 成立。证毕。

定理 2.1 给出了一个最优停时 σ_1，是否还有其它的最优停时呢？为此先要认识最优停时的特征。

定理2.2 设 $E|X_1| < \infty$ 且 $EX_k^+ < \infty$ $(k = 2, \cdots, N)$，则为了停时 τ 是最优的，必须且只须对一切 $n(1 \leqslant n < N)$，有

$$\gamma_n = \begin{cases} X_n, & \tau = n, \\ E(\gamma_{n+1} | \mathscr{F}_n), & \tau > n. \end{cases} \tag{2.3}$$

这里及以后，两个随机变量的相等均理解为 a.s. 相等，不论是否标出了 "a.s." 字样。

证明 充分性。设 τ 满足(2.3)。仿效定理 2.1 的证明知，

$$E\gamma_1 = \int_{\{\tau = 1\}} \gamma_1 \mathrm{d}P + \int_{\{\tau > 1\}} \gamma_1 \mathrm{d}P$$

$$= \int_{\{\tau = 1\}} \gamma_1 \mathrm{d}P + \int_{\{\tau > 1\}} \gamma_2 \mathrm{d}P$$

$$= \cdots = E\gamma_\tau = EX_\tau,$$

这表明 τ 是最优停时。

必要性。证明较长。设 τ 是最优停时，我们指出

$$I_{\{\tau\geq i\}}E(\gamma_\tau|\mathscr{F}_i)\leq I_{\{\tau\geq i\}}\gamma_i. \tag{2.4}$$

为了证明(2.4)，首先证明：对任何停时 $\eta\geq i$，有

$$E(\gamma_\eta|\mathscr{F}_i)\leq\gamma_i \text{ (a.s.)}. \tag{2.5}$$

实际上，对任何 $A\in\mathscr{F}_i$，

$$\begin{aligned}\int_A\gamma_i\mathrm{d}P &= \int_{A\cap\{\eta=i\}}\gamma_i\mathrm{d}P+\int_{A\cap\{\eta>i\}}\gamma_i\mathrm{d}P\\ &\geq\int_{A\cap\{\eta=i\}}\gamma_i\mathrm{d}P+\int_{A\cap\{\eta>i\}}\gamma_{i+1}\mathrm{d}P\\ &\geq\int_{A\cap\{\eta=i\}}\gamma_i\mathrm{d}P+\int_{A\cap\{\eta=i+1\}}\gamma_{i+1}\mathrm{d}P\\ &\quad+\int_{A\cap\{\eta>i+1\}}\gamma_{i+2}\mathrm{d}P\\ &\geq\cdots\geq\int_A\gamma_\eta\mathrm{d}P,\end{aligned}$$

故(2.5)成立。取 $\eta=\tau\vee i$，从(2.5)得到(2.4)。

现在来证明：对任何停时 $t\in\mathscr{A}(i,N)$，有

$$I_{\{\tau\geq i\}}E(X_\tau|\mathscr{F}_i)\geq I_{\{\tau\geq i\}}E(X_t|\mathscr{F}_i). \tag{2.6}$$

用反证法。若有 $A\in\mathscr{F}_i$，$P(A)>0$，在 A 上(2.6)不成立。令

$$\eta=\begin{cases}t, & \text{当 }\omega\in A,\\ \tau, & \text{当 }\omega\overline{\in}A,\end{cases}$$

则 η 是停时，且

$$EX_\eta=\int_A X_t\mathrm{d}P+\int_{A^C}X_\tau\mathrm{d}P>EX_\tau,$$

这与τ之最优性相矛盾，故(2.6)成立。在(2.6)中取$t=\sigma_i$，利用系2.1和(2.4)，(2.5)知

$$I_{\{\tau\geq i\}}E(X_\tau|\mathscr{F}_i)\geq I_{\{\tau\geq i\}}\gamma_i\geq I_{\{\tau\geq i\}}E(\gamma_\tau|\mathscr{F}_i),$$

但$X_\tau\leqslant\gamma_\tau$，$|EX_\tau|<\infty$，故$\gamma_\tau=X_\tau$ (a.s.)且

$$I_{\{\tau\geq i\}}\gamma_i=I_{\{\tau\geq i\}}E(\gamma_\tau|\mathscr{F}_i).$$

于是

$$\begin{aligned}I_{\{\tau>n\}}\gamma_n&=E\{I_{\{\tau>n\}}E(\gamma_\tau|\mathscr{F}_{n+1})|\mathscr{F}_n\}\\&=E\{I_{\{\tau>n\}}\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n\}\\&=I_{\{\tau>n\}}E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)(\text{当 }n<N\text{ 时})。\end{aligned}$$

这就证明了定理的必要性部分。证毕。

定理2.3（唯一性准则） 设$E|X_1|<\infty$，$EX_k^+<\infty(k=2,\cdots,N)$，则最优停时唯一的充要条件是：对一切$n<N$，有

$$P(\sigma_1=n,X_n=E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n))=0, \qquad (2.7)$$

这里

$$\sigma_1=\min\{k:\ 1\leqslant k\leqslant N,X_k=\gamma_k\}.$$

证明 必要性。设最优停时只有一个，我们用反证法证明(2.7)成立。设有n满足$P(B_n)>0$，这里

$$B_n=\{\sigma_1=n,X_n=E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)\}.$$

令

$$t=\begin{cases}\sigma_1, & \omega\overline{\in}B_n,\\ \sigma_{n+1}, & \omega\in B_n,\end{cases}$$

这里σ_{n+1}之定义见定理2.1。则t是停时，$P(t\neq\sigma_1)>0$。从系2.1知

$$E(X_{\sigma_{n+1}}|\mathscr{F}_{n+1})=\gamma_{n+1},$$

故

$$E(X_{\sigma_{n+1}}|\mathscr{F}_n)=E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)=X_n\ (\text{在}B_n\text{上}).$$

于是

$$EX_t=\int_{B_n^c}X_{\sigma_1}\mathrm{d}P+\int_{B_n}X_{\sigma_{n+1}}\mathrm{d}P$$

$$= \int_{B_n^C} X_{\sigma_1} \mathrm{d}P + \int_{B_n} X_n \mathrm{d}P = EX_{\sigma_1}.$$

这表明 t 也是最优停时．从而与假设相矛盾．故对一切 $n<N$，(2.7)成立．

充分性．设(2.7)成立(对一切 $n<N$)．若 τ 是任一最优停时，从定理2.2知 $\tau \geqslant \sigma_1$ 且在集合 $\{\sigma_1 = n < \tau\}$ 上，

$$X_n = \gamma_n = E(\gamma_{n+1} | \mathscr{F}_n).$$

故从(2.7)知 $P(\sigma_1 = n < \tau) = 0$．所以 $P(\sigma_1 < \tau) = 0$．这表明 $P(\tau \neq \sigma_1) = 0$，即 σ_1 是唯一的最优停时．证毕．

作为本节的结束，我们指出，"若将条件 $EX_k^+ < \infty$"($k = 1, \cdots, N$)改为"$EX_k^- < \infty$"($k = 1, \cdots, N$)，本节的全部结论仍成立，证法也无须改变．

§3 秘书问题

作为上节一般理论的应用，我们来叙述并解答一个著名问题——秘书问题．

这个问题的提法是这样的：某公司经理要从十个候选人中选一个当秘书，十个人是一个一个地和经理见面．这十个人优劣不等，最好的，次好的，…，直到最差的(十等)．现这十人按随机的顺序(即各种顺序的机会相等)去见经理，经理每见一位必须明确表态：拒绝或是接受他．如果拒绝，则可以见下一个人；如果接受，则不能见后面的人，拒绝过的不能召回．试问：这位经理应该采取怎样的策略，以使得找到最好的人当秘书的概率最大？

这个问题还有许多种别的提法，一种有趣的提法如下：假如一个国王要赠给某官员一件艺术品，要该官员从十件艺术品中挑选．这十件艺术品的精美程度不同，有最美的，次美的，…，直

到最差的，但并不把这十件艺术品同时拿出来让官员挑，而是以随机的顺序一件一件地展现在他的面前，他一旦看中了某一个就不许往下看了，若前九个都看不中，则必须取第十个。现在问：该官员应该采取怎样的策略，以保证选到最美的艺术品的概率最大？

这类问题统称秘书问题，是Cayley(1875)首先提出的。其一般情形下的解答是Gardener(1960)给出的。

这个问题可概括为下列模型：设有N个东西($N\geqslant 2$)，代号是$1,2,\cdots,N$，号码越小就越好。这些东西按随机顺序排列，我们依序进行观察，任何两个可互相比较优劣，但不知道它们的实际号码。顺序观察时或者拒绝或者接受(后一情形就停止观察)。问：怎样的停止规则使得到"1"的概率最大？

此问题可表述为随机序列的最优停止问题。

记

$$\Omega=\{\omega:\ \omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N)\text{是}1,2,\cdots,N\text{的任一排列}\}.$$

Ω共有$N!$个元素。令$P(\omega)=\frac{1}{N!}(\omega\in\Omega)$。$\mathscr{F}$由$\Omega$之一切子集组成。对任何$A\in\mathscr{F}$，规定$P(A)=\sum\limits_{\omega\in A}P(\omega)$。当$\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_N)\in\Omega$时，令$\xi_k(\omega)=\omega_k$，$y_k(\omega)=\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_k$中小于或等于$\omega_k$的个数(即$\omega_k$在$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_k$中的相对名次)。于是有随机序列$\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N\}$，$\{y_1,y_2,\cdots,y_N\}$。注意前一序列是非观察的，后者是观察变量(即为观察者所知的变量)。令$\mathscr{F}_k=\sigma(y_1,\cdots,y_k)$(即使$y_1,\cdots,y_k$都可测的最小$\sigma$代数)。这是到时刻$k$为止得到的全部信息。

令

$$g_k(y)=\begin{cases}\dfrac{K}{N}, & \text{当}y=1,\\ 0, & \text{当}y>1.\end{cases}$$

$$\chi_i=g_i(y_i)(i=1,\cdots,N).$$

当然χ_i是$\mathscr{F}_i$可测的。任何策略(即停止法则)都是关于$\{\mathscr{F}_k\}$的停时。我们希望找到停时τ^*满足：

$$P(\xi_{\tau^*}=1)=\sup_{\tau}P(\xi_{\tau}=1),$$

这里sup是对一切停时τ而言的。

为了将这个问题化为§1中 的 最优停止(最大期望)问题，先证几个引理。

引理3.1 设$j_1,j_2,\cdots,j_k$是$1,2,\cdots,k$之任一排列($1\leqslant k\leqslant N$)，

$A(j_1,\cdots,j_k)=\{(\omega_1,\cdots,\omega_N)$: ω_1在头k个里处于(相对)第j_1名，$\cdots$，ω_k在头k个里处于(相对)第j_k名$\}$，

则

$$\#(A(j_1,\cdots,j_k))=\frac{N!}{k!},$$

这里$\#(B)$表示集合B的元素个数。

证明 设$j'_1,j'_2,\cdots,j'_k$也是$1,2,\cdots k$的一个排列，我们来证

$$\#(A(j_1,\cdots,j_k))=\#(A(j'_1,\cdots,j'_k)).\tag{3.1}$$

考虑映射

$$T((\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N))=(\bar{\omega}_1,\cdots,\bar{\omega}_k,\omega_{k+1},\cdots,\omega_N),$$

这里$\bar{\omega}_1$是$(\omega_1,\cdots,\omega_k)$中相对名次是$j'_1$的分量，$\bar{\omega}_2$是$(\omega_1\cdots,\omega_k)$中相对名次是$j'_2$的分量，$\cdots$。则$T$是$A(j_1,\cdots,j_k)$到$A(j'_1,\cdots,j'_k)$上之一一映射，故(3.1)成立。另一方面

$$\Omega=\bigcup_{(j_1,\cdots,j_k)}A(j_1,\cdots,j_k),$$

这里每个加项对应$1,\cdots,k$的一个排列$(j_1,\cdots,j_k)$，加项两两不相交。又$\#(\Omega)=N!$，这就推出了引理3.1的结论。证毕。

引理3.2 设$i_1,\cdots,i_k$是k个整数，$1\leqslant i_l\leqslant l(l=1,\cdots,k)$，则有

(1) $P\{y_1=i_1,\cdots,y_k=i_k\}=\frac{1}{k!}$;

(2) $P\{y_l=i_l\}=\frac{1}{l}(l=1,2,\cdots,k)$;

(3) $y_1,y_2,\cdots,y_N$相互独立;

(4) $P\{y_1=i_1,\cdots,y_k=i_k,\xi_k=1\}=$

$$P\{y_1=i_1,\cdots,y_k=i_k\}g_k(i_k).$$

证明 给定 $i_1,\cdots,i_k$后，我们说必有$\{1,2,\cdots,k\}$的一个排列$j_1,\cdots,j_k$满足：

$$\{\omega:\ y_1=i_1,\cdots,y_k=i_k\}=A(j_1,\cdots,j_k), \qquad (3.2)$$

其中$A(j_1,\cdots,j_k)$之定义见引理3.1。

我们可用归纳法证明这一点。$k=1$时结论显然(因为 $i_1=1$)。若对于$k=l-1$结论成立，即有$\{1,2,\cdots,l-1\}$的排列$(j'_1,\cdots,j'_{l-1})$满足：

$$\{\omega:\ y_1=i_1,\cdots,y_{l-1}=i_{l-1}\}=A(j'_1,\cdots,j'_{l-1}),$$

当$s\leqslant l-1$且$j'_s\geqslant i_l$时，令$j_s=j'_s+1$；当 $s\leqslant l-1$ 且 $j'_s<i_l$时，令$j_s=j'_s$；当$s=l$时，令 $j_s=i_s$。则

$$\{\omega:\ y_1=i_1,\cdots,y_l=i_l\}=A(j_1,\cdots,j_l).$$

可见(3.2)对一切$N\geqslant k\geqslant 1$成立。于是

$$P(y_1=i_1,\cdots,y_k=i_k)=\frac{\#(A(j_1,\cdots,j_k))}{N!}=\frac{1}{k!}.$$

在此式中对$i_1,\cdots,i_{k-1}$求和，得$P(y_k=i_k)=\frac{1}{k}$，从而

$$P(y_1=i_1,\cdots,y_k=i_k)=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{k}$$

$$=P(y_1=i_1)P(y_2=i_2)\cdots P(y_k=i_k).$$

这表明$y_1,\cdots,y_k$相互独立。

为了证明(4)成立。不妨设 $i_k=1$(否则(4)式两边都是0)。

$$\#\{\omega:\ y_1=i_1,\cdots,y_k=1,\xi_k=1\}$$

$$=\#\{(\omega_1,\cdots,\omega_{k-1},1,\omega_{k+1},\cdots,\omega_N):\ y_1=i_1,\cdots,y_{k-1}=i_{k-1}\}$$

$$=\frac{(N-1)!}{(k-1)!}.$$

于是

$$P(y_1=i_1,\cdots,y_k=1,\xi_k=1)$$

$$=\frac{1}{N!}\cdot\frac{(N-1)!}{(k-1)!}=\frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{1}{N}$$

$$=\frac{k}{N}P(y_1=i_1,\cdots,y_k=1).$$

证毕。

引理3.3 设$x_k=g_k(y_k)$。τ是关于$\{\mathscr{F}_k\}$之任一停时，则

$$P(\xi_\tau=1)=Ex_\tau.$$

证明 首先证明

$$P(\xi_k=1|\mathscr{F}_k)=g_k(y_k).$$

对任何$A\in\mathscr{F}_k$，有Borel集B满足：

$$A=\{(y_1,\cdots,y_k)\in B\}.$$

于是

$$P(A,\xi_k=1)=\sum_{(i_1,\cdots,i_k)\in B}P(y_1=i_1,\cdots,y_k=i_k,\xi_k=1)$$

$$=\sum_{(i_1,\cdots,i_k)\in B}P(y_1=i_1,\cdots,y_k=i_k)g_k(i_k)$$

$$=\int_A g_k(y_k)\mathrm{d}P.$$

故

$$P(\xi_k=1|\mathscr{F}_k)=g_k(y_k).$$

$$P(\xi_\tau=1)=\sum_{k=1}^{N}P(\tau=k,\xi_k=1)$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\int_{\{\tau=k\}}P(\xi_k=1|\mathscr{F}_k)\mathrm{d}P$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\int_{\{\tau=k\}}g_k(y_k)\mathrm{d}P=Ex_\tau.$$

证毕。

值得注意的是，对测度P而言，零测集必是空集，故对P而言"a.s.成立"就是"处处成立"。

从引理3.3看出，要找停止法则τ(停时)使得$P(\xi_\tau=1)$达到最大，等价于使Ex_τ达到最大，故我们可用§2中理论来求解，关键是求出$\{\gamma_n\}$。

首先，我们指出，γ_i是$\sigma(y_i)$可测的，可用后退归纳法证明这一点。显然$\gamma_N=x_N=g_N(y_N)$是$\sigma(y_N)$可测的。若$i=k$时γ_i是$\sigma(y_i)$可测，即有Borel函数$\phi_k(\cdot)$使得$\gamma_k=\phi_k(y_k)$，则

$$\begin{aligned}\gamma_{k-1}&=\max(x_{k-1},E(\phi_k(y_k)|\mathscr{F}_{k-1}))\\&=\max(x_{k-1},E\phi_k(y_k))\end{aligned}$$

(因为y_k与$y_1,\cdots,y_{k-1}$相互独立)。可见γ_{k-1}也是$\sigma(y_{k-1})$可测的。依归纳法知，对一切$1\leqslant i\leqslant N$，γ_i是$\sigma(y_i)$可测的，即有Borel函数ϕ_i使得$\gamma_i=\phi_i(y_i)(i=1,\cdots,N)$，且

$$\begin{aligned}\phi_i(y_i)&=\max(g_i(y_i),E(\phi_{i+1}(y_{i+1})|\mathscr{F}_i))\\&=\max(g_i(y_i),E\phi_{i+1}(y_{i+1}))\\&=\max\left(g_i(y_i),\sum_{j=1}^{i+1}\phi_{i+1}(j)P(y_{i+1}=j)\right)\\&=\max\left(g_i(y_i),\frac{1}{i+1}\sum_{j=1}^{i+1}\phi_{i+1}(j)\right)\quad(i=1,\cdots,N-1).\end{aligned}$$

注意

$$\phi_N(y)=g_N(y)=\begin{cases}1, & y=1,\\0, & y>1.\end{cases}$$

利用上列递推公式就可求出所有的ϕ_k来。为找出ϕ_k之明显表达式，设$N\geqslant3$，

$$m^*\triangleq\min\left\{m;\ m\geqslant1,\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}+\cdots+\frac{1}{m}\leqslant1\right\},$$

则
$$2\leqslant m^*\leqslant N-1.$$

引理3.4 对一切$m^*\leqslant k<N$，有

$$\phi_k(1)=\frac{k}{N},$$

$$\phi_k(i)=\frac{k}{N}\left(\frac{1}{N-1}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\quad(i>1);$$

对一切$1\leqslant k<m^*$，有

$$\phi_k(i)\equiv\phi_{m^*-1}(i)=\frac{m^*-1}{N}\left(\frac{1}{N-1}+\cdots+\frac{1}{m^*-1}\right)\quad(1\leqslant i\leqslant k).$$

证明 利用ϕ_k的递推公式及后退归纳法即知所述结论成立，证毕。

从定理1.1知，对$\{x_k\}$的一个最优停时是

$$\begin{aligned}\sigma_1&=\inf\{k;\ 1\leqslant k\leqslant N,\gamma_k=x_k\}\\&=\inf\{k;\ 1\leqslant k\leqslant N,\phi_k(y_k)=g_k(y_k)\}\\&=\inf\{k;\ 1\leqslant k\leqslant N-1,\phi_k(y_k)=g_k(y_k)\}\wedge N,\end{aligned}$$

这里

$$a\wedge b\triangleq\min(a,b),\quad \inf\varnothing\triangleq\infty.$$

由于$y_k>1$时，$\phi_k(y_k)>0$，而$g_k(y_k)=0$，故

$$\sigma_1=\inf\left\{k;\ 1\leqslant k\leqslant N-1,\phi_k(1)=\frac{k}{N},\ y_k=1\right\}\wedge N.$$

但对一切$1\leqslant k<m^*$，

$$\phi_k(1)=\frac{m^*-1}{N}\left(\frac{1}{N-1}+\cdots+\frac{1}{m^*-1}\right)>\frac{k}{N},$$

而$k\geqslant m^*$时，$\phi_k(1)=\frac{k}{N}$，故得

定理3.1 $\sigma_1=\inf\{k;\ m^*\leqslant k\leqslant N-1,y_k=1\}\wedge N$.

这个最优停时(最优选取策略)可描述如下：要从N件物品

中选取最好的，应该观察并放过头 m^*-1个见到的物品，然后观察到第一个这样的东西：它比前面的都好为止。若观察到第 $N-1$ 件，发现第 $N-1$ 件并不比以前各件都好，则接受第N件。此时挑到最好物品的概率是$P(\xi_{\sigma_1}=1)$。

据定理1.1知

$$P(\xi_{\sigma_1}=1)=E\gamma_1=E\phi_1(y_1)$$

$$=\frac{m^*-1}{N}\left(\frac{1}{N-1}+\cdots+\frac{1}{m^*-1}\right).$$

如取$N=10$，易知$m^*=4$，

$$P(\xi_{\sigma_1}=1)=\frac{3}{10}\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3}\right)\doteq 0.4.$$

如取$N=5$，易知$m^*=3$，$P(\xi_{\sigma_1}=1)=0.433$。

$N=4$，易知$m^*=2$，$P(\xi_{\sigma_1}=1)=0.458$。

$N=3$，易知$m^*=2$，$P(\xi_{\sigma_1}=1)=0.5$。

以上讨论都假定了$N\geqslant 3$。当$N=2$时，显然$\tau_1\equiv 1$及$\tau_2\equiv 2$都是最优停时。当N很大时，m^*如何算？利用不等式

$$\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\leqslant\frac{1}{k}\leqslant\int_{k+1}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

易推知 $m^*\sim\frac{N}{e}$ $(N\to\infty)$，而且

$$P(\xi_{\sigma_1}=1)=\frac{m^*-1}{N}\left(\frac{1}{N-1}+\cdots+\frac{1}{m^*-1}\right)\to\frac{1}{e}$$

$$\doteq 0.368\ (N\to\infty).$$

上面已指出 $N=2$ 时，最优停时(策略)不唯一。下面指出 $N\geqslant 3$ 时，上面求出的 σ_1 是唯一的最优停时(策略)(见薛行鸿(1985))。

引理3.5 调和级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$的任一截断$S_{n,k}=\sum\limits_{i=k}^{n}\frac{1}{i}$

$(n>1)$不可能是整数。

证明 若$k=n>1$，则结论显然成立。下面设$1\leqslant k\leqslant n$。任何正整数 l 可表成$l=a_l\cdot 2^{i_l}$(a_l 是正奇数，i_l 是非负整数)。令$M=\max(i_k,i_{k+1},\cdots,i_n)$。易知$M\geqslant 1$且有唯一的$l(k\leqslant l\leqslant n)$满足$M=i_l$。以下记这个 l 为l^*。记$a_k,a_{k+1},\cdots,a_n$之最小公倍数为m，

$$u_i=\frac{m}{a_i}\quad(i=k,\cdots,n),$$

当然u_i是奇数，故

$$\begin{aligned}\sum_{l=k}^{n}\frac{1}{l}&=\sum_{l\neq l^*}\frac{1}{a_l\cdot 2^{i_l}}+\frac{1}{a_{l^*}\cdot 2^{i_{l^*}}}\\&=\sum_{l\neq l^*}\frac{u_l 2^{M-i_l}}{m2^M}+\frac{u_{l^*}}{m2^M}\\&=\frac{\sum\limits_{l\neq l^*}u_l\cdot 2^{M-i_l}+u_{l^*}}{m2^M}.\end{aligned}$$

注意$M-i_l\geqslant 1(l\neq l^*)$，此式分子是奇数，分母是偶数，从而$\sum\limits_{l=k}^{n}\frac{1}{l}$不能是整数。证毕。

定理3.2 当$N\geqslant 3$时，σ_1是秘书问题的唯一的最优停时。

证明 据定理1.3，只须证

$$P(\sigma_1=n,x_n=E(\gamma_{n+1}\mid\mathscr{F}_n))=0. \tag{3.3}$$

当$n\geqslant m^*$时（m^*之定义见前），

$$\begin{aligned}E(\gamma_{n+1}\mid\mathscr{F}_n)&=E(\phi_{n+1}(y_{n+1})\mid\mathscr{F}_n)\\&=E\phi_{n+1}(y_{n+1})=\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\phi_{n+1}(j)\\&=\frac{n}{N}\left(\frac{1}{N-1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{n}{N}\sum_{k=n}^{N-1}\frac{1}{k} < \frac{n}{N}\quad (N \geqslant 3).$$

但在集合$\{\sigma_1 - n < N\}$上，$y_n = 1$，从而

$$x_n = \frac{n}{N} > E(\gamma_{n+1} \mid \mathscr{F}_n).$$

这表明(3.3)成立。证毕。

§4　随机序列的最优停时的存在性

从本节开始，我们来讨论无穷序列$(X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0)$的最优停止问题。和有限时间内的情况不同，现在序列没有最后元素，后退归纳法用不上，情况复杂多了，甚至有时最优停时不存在。我们首先讨论最优停时的存在性条件。

我们沿用§1中的定义和记号，例如：

$$C = \{\tau:\ \tau\text{是停时且}EX_\tau\text{存在}\},$$

记 $V = \sup\{EX_\tau:\ \tau \in C\}$.

为了保证得到明确的结果，提出下列条件：

$$A^+:\ E(\sup_{n\geqslant 0} X_n^+) < \infty.$$

本节的主要目标是证明：在条件A^+满足时，最优停时一定存在，即有停时τ^*使得$EX_{\tau^*} = V$.

为了证明这个主要定理，要作许多准备工作，首先引进本性上确界的概念。

定义4.1　设$\{\xi_\alpha, \alpha \in A\}$是$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上广义实值的随机变量族，称随机变量$z = z(\omega)$是它的本性上确界，如果

i) 对任何$\alpha \in A$, $\xi_\alpha \leqslant z$ (a.s.);

ii) 若$Y = Y(\omega)$满足：对一切$\alpha \in A$, $\xi_\alpha \leqslant Y$ (a.s.)，则有$Y \geqslant z$ (a.s.).

显然，本性上确界如果存在，则只有一个(a.s. 意义下)，

以下记作 $\mathrm{e.sup}\{\xi_\alpha\}$ 或 $\mathrm{e.sup}\{\xi_\alpha: \alpha\in A\}$。当 A 至多可数时，$\sup\{\xi_\alpha: \alpha\in A\}$ 就是一个本性上确界。我们指出，任何随机变量族均有本性上确界。

引理4.1 设 $\{\xi_\alpha, \alpha\in A\}$ 是广义实值的随机变量族，则存在 A 之至多可数子集 M 使得 $\sup\{\xi_\alpha: \alpha\in M\}$ 就是 $\{\xi_\alpha, \alpha\in A\}$ 的本性上确界。

证明 不妨设 A 是不可数集。对任何可数集 $B\subset A$，令

$$f(B)=\int_\Omega \sup\{\mathrm{arctg}\,\xi_\alpha: \alpha\in B\}\mathrm{d}P,$$

这里规定

$$\mathrm{arctg}\infty=\frac{\pi}{2}, \qquad \mathrm{arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}.$$

令

$$a=\sup\{f(B): B\text{是}A\text{之可数子集}\}.$$

当然有 $B_n\subset A, B_n$ 可数 $(n\geqslant 1)$，满足 $\lim\limits_n f(B_n)=a$。令 $M=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$，则 M 是可数集且 $f(M)=a$。记

$$z=\sup\{\xi_\alpha: \alpha\in M\}.$$

我们指出，z 就是 $\{\xi_\alpha, \alpha\in A\}$ 的本性上确界。实际上，任给定 $\beta\in A$，

$$a=f(M)\leqslant f(M\cup\{\beta\})\leqslant a,$$

故

$$f(M)=f(M\cup\{\beta\}).$$

于是

$$\sup\{\mathrm{arctg}\,\xi_\alpha: \alpha\in M\}=\sup\{\mathrm{arctg}\,\xi_\alpha: \alpha\in M\cup\beta\}\ (\mathrm{a.s.}),$$

从而

$$\sup\{\mathrm{arctg}\,\xi_\alpha: \alpha\in M\}\geqslant \mathrm{arctg}\xi_\beta\}\ (\mathrm{a.s.}).$$

所以 $z\geqslant\xi_\beta$ (a.s.)。证毕。

引理4.2 设 $E\xi^+<\infty$，则

$$\overline{\lim_n}E(\xi|\mathscr{F}_n)\leqslant E(\xi|\mathscr{F}_\infty)\ (\mathrm{a.s.}),$$

这里$\mathscr{F}_\infty$是包含所有$\mathscr{F}_n$之最小σ代数。

证明 任给定负整数m，随机变量$\xi\vee m=\max(\xi,m)$是可积的，依熟知的Levy定理有

$$\lim_n E(\xi\vee m\mid\mathscr{F}_n)=E(\xi\vee m\mid\mathscr{F}_\infty).$$

故

$$\overline{\lim_n}\, E(\xi\mid\mathscr{F}_n)\leqslant\lim_n E(\xi\vee m\mid\mathscr{F}_n)=E(\xi\vee m\mid\mathscr{F}_\infty)\,(\text{a.s.}).$$

由于$\xi\vee m\leqslant\xi^+$ $(m\leqslant 0)$，依Fatou引理知

$$\overline{\lim_{m\to-\infty}}\, E(\xi\vee m\mid\mathscr{F}_\infty)\leqslant E(\xi\mid\mathscr{F}_\infty)\,(\text{a.s.}).$$

所以

$$\overline{\lim_n}\, E(\xi\mid\mathscr{F}_n)\leqslant E(\xi\mid\mathscr{F}_\infty)\,(\text{a.s.}).$$

证毕。

引理4.3 设$\xi\geqslant 0, E\xi<\infty,\{\xi_n\}$满足：

$$\xi_n\leqslant E(\xi\mid\mathscr{F}_n)\ \ (\text{a.s.}),\qquad n\geqslant 1,$$

则有

$$E(\overline{\lim_n}\,\xi_n)\geqslant\overline{\lim_n}\, E\xi_n.$$

证明 令$\eta_n=E(\xi\mid\mathscr{F}_n)-\xi_n$，由Fatou引理知

$$E(\underline{\lim}\,\eta_n)\leqslant\underline{\lim}\, E\eta_n.$$

但

$$\underline{\lim}\,\eta_n=E(\xi\mid\mathscr{F}_\infty)-\overline{\lim_n}\,\xi_n\ \ (\text{a.s.}),$$

$$E\eta_n=E\xi-E\xi_n.$$

所以

$$E(\overline{\lim}\,\xi_n)\geqslant\overline{\lim}\, E\xi_n.$$

证毕。

令

$$C_n=\{\tau:\ \tau\text{是停时，}\tau\geqslant n\text{且}EX_\tau\text{存在}\},$$

$$\gamma_n=\text{e.sup}\{E(X_\tau\mid\mathscr{F}_n):\ \tau\in C_n\},\tag{4.1}$$

这里$n=0,1,2,\cdots$。我们约定$\text{e.sup}\,\varnothing=-\infty$。显然，$C_0=C$。从引理4.1知，$\gamma_n$是存在的且可选得是$\mathscr{F}_n$可测的。以下就假定$\gamma_n$是

$\mathscr{F}_n$可测的。显然，只要EX_n存在，则$\gamma_n \geqslant X_n$ (a.s.)。序列$(\gamma_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0)$叫做$(X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0)$的Snell包。

引理4.4 设A^+成立，则对一切$n \geqslant 0$,

$$\gamma_n \leqslant \max(X_n, E(\gamma_{n+1} | \mathscr{F}_n)) \quad (\text{a.s.}). \tag{4.2}$$

证明 对任何$\tau \in C_n$，有$X_\tau \leqslant \sup\limits_{k \geqslant n} X_k^+$，故

$$E(X_\tau | \mathscr{F}_n) \leqslant E(\sup_{k \geqslant 0} X_k^+ | \mathscr{F}_n) \quad (\text{a.s.}).$$

所以

$$\gamma_n \leqslant E(\sup_{k \geqslant 0} X_k^+ | \mathscr{F}_n) \quad (\text{a.s.}).$$

因此$E\gamma_n$存在。当$\tau \in C_n$时，

$$\begin{aligned} E(X_\tau | \mathscr{F}_n) &= I_{\{\tau=n\}} X_n + I_{\{\tau>n\}} E(X_{\tau \vee (n+1)} | \mathscr{F}_n) \\ &\leqslant I_{\{\tau=n\}} X_n + I_{\{\tau>n\}} E(\gamma_{n+1} | \mathscr{F}_n) \\ &\leqslant \max(X_n, E(\gamma_{n+1} | \mathscr{F}_n)) \quad (\text{a.s.}). \end{aligned}$$

由于τ是C_n中的任意停时，故(4.2)成立。证毕。

引理4.5 设A^+成立，则

$$\overline{\lim_n}\, \gamma_n = \overline{\lim_n}\, X_n (\text{a.s.}).$$

证明 任给定$0 \leqslant m < n$，$\tau \in C_n$，有

$$E(X_\tau | \mathscr{F}_n) \leqslant E(\sup_{j \geqslant m} X_j | \mathscr{F}_n),$$

故

$$\gamma_n \leqslant E(\sup_{j \geqslant m} X_j | \mathscr{F}_n).$$

从引理 4.2 知

$$\overline{\lim_n}\, \gamma_n \leqslant E(\sup_{j \geqslant m} X_j | \mathscr{F}_\infty) = \sup_{j \geqslant m} X_j (\text{a.s.}).$$

令$m \to \infty$,

$$\overline{\lim_n}\, \gamma_n \leqslant \overline{\lim_n}\, X_n \quad (\text{a.s.}).$$

另一方面，$X_n \leqslant \gamma_n$ (a.s.)，故$\overline{\lim\limits_n}\, \gamma_n = \overline{\lim}\, X_n$ (a.s.)。证毕。

以下约定，"$\xi = \eta$" 意味着 "$\xi = \eta$ (a.s.)"，"$\xi \leqslant \eta$" 意味着 "$\xi \leqslant \eta$ (a.s.)"。

以下记

$$V_n = \sup\{EX_\tau:\ \tau \in C_n\},$$
$$\sigma_n = \inf\{k:\ k \geqslant n,\ \gamma_k = X_k\}, \tag{4.3}$$
$$\sigma = \sigma_0.$$

我们的目标是证明，在A^+下，σ_n是C_n中最优的，即$EX_{\sigma_n} = V_n$ $(n \geqslant 0)$，特别σ是最优停时。

定理4.1 设A^+成立，$\varepsilon \geqslant 0$，$\tau \in C_n$满足：对一切$k \geqslant n$，

$$\gamma_k \leqslant X_k + \varepsilon, \qquad \text{当}\ \tau = k\ \text{时},$$
$$\gamma_k \leqslant E(\gamma_{k+1} \mid \mathscr{F}_k), \qquad \text{当}\ \tau > k\ \text{时},$$

则

$$E(X_\tau \mid \mathscr{F}_n) \geqslant \gamma_n - \varepsilon, \qquad EX_\tau \geqslant E\gamma_n - \varepsilon \geqslant V_n - \varepsilon.$$

证明 只须证第一个不等式成立。任意给定$A \in \mathscr{F}_n$，

$$\begin{aligned}
\int_A \gamma_n \mathrm{d}P &= \int_{A\cap\{\tau=n\}} \gamma_n \mathrm{d}P + \int_{A\cap\{\tau>n\}} \gamma_n \mathrm{d}P \\
&\leqslant \int_{A\cap\{\tau=n\}} \gamma_n \mathrm{d}P + \int_{A\cap\{\tau>n\}} \gamma_{n+1} \mathrm{d}P \\
&= \int_{A\cap\{\tau=n\}} \gamma_n \mathrm{d}P + \int_{A\cap\{\tau=n+1\}} \gamma_{n+1} \mathrm{d}P \\
&\quad + \int_{A\cap\{\tau>n+1\}} \gamma_{n+1} \mathrm{d}P \\
&\leqslant \cdots \leqslant \int_{A\cap\{\tau\leqslant N\}} \gamma_\tau \mathrm{d}P + \int_{A\cap\{\tau>N\}} \gamma_N \mathrm{d}P.
\end{aligned}$$

但是

$$I_{A\cap\{\tau>N\}}\gamma_N \leqslant E(\sup_{j\geqslant 0} X_j^+ \mid \mathscr{F}_N),$$

利用引理 4.3 知

$$\begin{aligned}
\int_A \gamma_n \mathrm{d}P &\leqslant \int_{A\cap\{\tau<\infty\}} \gamma_\tau \mathrm{d}P + \int_{A\cap\{\tau=\infty\}} \overline{\lim_N}\, \gamma_N \mathrm{d}P \\
&= \int_{A\cap\{\tau<\infty\}} (X_\tau - \varepsilon)\mathrm{d}P + \int_{A\cap\{\tau=\infty\}} (\overline{\lim}\, X_N + \varepsilon)\mathrm{d}P \\
&= \int_A (X_\tau + \varepsilon)\mathrm{d}P.
\end{aligned}$$

这里利用了规定：$X_\infty=\overline{\lim_n} X_n$。这就证明了 $E(X_\tau|\mathscr{F}_n)\geqslant\gamma_n-\varepsilon$。证毕。

定理4.2 设条件A^+成立，$\varepsilon\geqslant 0$，且

$$\sigma_n(\varepsilon)=\inf\{k:\ k\geqslant n,\ \gamma_k\leqslant X_k+\varepsilon\},\tag{4.4}$$

则有下列结论：

① $E(X_{\sigma_n(\varepsilon)}|\mathscr{F}_n)\geqslant\gamma_n-\varepsilon$，$EX_{\sigma_n(\varepsilon)}\geqslant V_n-\varepsilon$； (4.5)

② $\sigma_n=\sigma_n(0)$是C_n中最优的，从而$\sigma=\sigma_0$是所有停时中最优的；

③ 如果$\varepsilon>0$，$V_n>-\infty$，那末$\sigma_n(\varepsilon)$是有限的；

④ 如果$\underline{\lim_k} X_k=-\infty$ (a.s.)，$V_n>-\infty$，那末σ_n是有限的。

证明 取$\tau=\sigma_n(\varepsilon)$，从定理4.1直接推知(4.5)成立。在(4.5)中取$\varepsilon=0$，即知σ_n是C_n中最优的，当然σ_0是所有停时中最优的。

若$\varepsilon>0$，$V_n>-\infty$，则

$$EX_{\sigma_n(\varepsilon)}\geqslant V_n-\varepsilon>-\infty,$$

从而$X_{\sigma_n(\varepsilon)}$可积，于是

$$P(|X_{\sigma_n}(\varepsilon)|=\infty)=0。$$

但是

$$\begin{aligned}\{\sigma_n(\varepsilon)=\infty\}&=\{对一切k\geqslant n,\ X_k+\varepsilon<\gamma_k\}\\&\subset\left\{\overline{\lim_k}X_k+\varepsilon\leqslant\overline{\lim_k}\gamma_k,\ \sigma_n(\varepsilon)=\infty\right\}\\&=\{X_\infty+\varepsilon\leqslant\gamma_\infty,\ \sigma_n(\varepsilon)=\infty\},\end{aligned}$$

$$X_\infty=\gamma_\infty\ (\text{a.s.}),$$

于是

$$P(\sigma_n(\varepsilon)=\infty)\leqslant P(|X_{\sigma_n(\varepsilon)}|=\infty)=0。$$

这表明$\sigma_n(\varepsilon)$是有限的。

若$\underline{\lim_k} X_k=-\infty$ (a.s.)，$V_n>-\infty$，则$EX_{\sigma_n}\geqslant V_n>-\infty$。若$P(\sigma_n=\infty)>0$，则

$$P(X_{\sigma_n}=-\infty)\geqslant P(\sigma_n=\infty)>0,$$

于是 $EX_{\sigma_n}=-\infty$。这就产生了矛盾。故 $P(\sigma_n=\infty)=0$。证毕。

系4.1 设 A^+ 成立，$V_n>-\infty$ 而且

$$\tilde{C}_n=\{\tau:\ \tau\geqslant n,\ \tau\text{ 是有限停时},\ EX_\tau\text{ 存在}\},$$

$$\tilde{\gamma}_n=\mathrm{e.sup}\{E(X_\tau\mid\mathscr{F}_n):\ \tau\in\tilde{C}_n\},$$

$$\tilde{V}_n=\sup\{EX_\tau:\ \tau\in\tilde{C}_n\},$$

则

$$\tilde{\gamma}_n=\gamma_n\ (\mathrm{a.s.}),\quad \tilde{V}_n=V_n.$$

证明 对任何 $\varepsilon>0$，从定理 4.2 知

$$\tilde{V}_n\geqslant E(X_{\sigma_n(\varepsilon)})\geqslant V_n-\varepsilon,$$

由于 ε 可任意小，故 $\tilde{V}_n\geqslant V_n$。另一方面显然有 $\tilde{V}_n\leqslant V_n$，所以 $\tilde{V}_n=V_n$。由于

$$E\gamma_n\leqslant E(X_{\sigma_n(\varepsilon)})+\varepsilon\leqslant E\tilde{\gamma}_n+\varepsilon.$$

而 ε 可任意小，故 $E\gamma_n\leqslant E\tilde{\gamma}_n$。但显然有 $\gamma_n\geqslant\tilde{\gamma}_n$(a.s.)，故 $\tilde{\gamma}_n=\gamma_n$(a.s.)。证毕。

附带说一句，从下一节的引理5.2知道，系4.1中的条件"A^+ 成立"可以去掉。

最后我们指出，在 A^+ 下，最优停时不一定是有限的；没有条件 A^+，则最优停时可能不存在。

例4.1 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是任何概率空间，$\{\mathscr{F}_n\}$ 是一列上升的子 σ 代数。$X_n=\dfrac{n}{n+1}$ $(n\geqslant 0)$。当然条件 A^+ 成立。易知 $\gamma_n=1$ (a.s.)。当然 $\sigma=\infty$ 是最优停时，且 $V=1$。若 τ 是任何有限停时，则 $X_\tau<X_{\tau+1}$，故 $EX_\tau<EX_{\tau+1}$。这表明任何有限停时都不是最优的。

例4.2 设 $y_0,y_1,\cdots$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上相互独立的随机变量列，y_i 取值 1 或 -1，且

$$P(y_i=1)=P(y_i=-1)=\frac{1}{2}\quad(i\geqslant 0),$$

$$X_n=\frac{2(n+1)}{n+2}\prod_{k=0}^{n}(y_k+1),$$

$$\mathscr{F}_n = \sigma(y_0, y_1, \cdots, y_n) \quad (n \geq 0).$$

我们来研究序列$(X_n, \mathscr{F}_n, n\geq 0)$的最优停止问题。我们指出，$V=2$，但对一切停时$\tau$均有$EX_\tau<2$，即无最优停时。

实际上，

$$E(X_{n+1} | \mathscr{F}_n) = E\left\{\frac{2(n+2)}{n+3}(y_{n+1}+1)\frac{n+2}{2(n+1)}X_n \middle| \mathscr{F}_n\right\}$$

$$= \frac{n^2+4n+4}{n^2+4n+3}X_n,$$

可见$E(X_{n+1} | \mathscr{F}_n) \geq X_n$且等号成立的充要条件是$X_n=0$。

由于$\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\{X_n=0\} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\{y_n=-1\}$，从 Borel-Cantelli 引理知

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\{X_n=0\}\right)=1.$$

可见

$$\lim_n X_n = 0 \quad (\text{a.s.}).$$

任给定停时τ，令$s=\inf\{n: X_n=0\}$。分两种情况讨论：

1）$P(\tau\geq s)=1$。此时$X_\tau=0$，故

$$EX_\tau = 0<2.$$

2）$P(\tau\geq s)<1$。此时有n_0，使得

$$P(\tau=n_0<s)>0.$$

由于$\{\tau=n_0<s\}\in\mathscr{F}_{n_0}$，故有$B\neq\varnothing$使得

$$\{\tau=n_0<s\}=\{(y_0, y_1, \cdots, y_{n_0})\in B\}.$$

由于这个集合非空，

$$\{\tau=n_0<s\}=\{y_0=1, \cdots, y_{n_0}=1\}.$$

由此可见，若$\tau(\omega)>n_0$，则有$k\leq n_0$使得$y_k(\omega)=-1$，从而$X_k(\omega)=0$。于是$X_\tau(\omega)=0$，

$$EX_\tau = \int_{\{\tau\leq n_0\}} X_\tau dP = \sum_{k=0}^{n_0}\int_{\{\tau=k\}} X_k dP$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n_0} \int_{(\tau=k)} X_{n_0} \mathrm{d}P \leqslant EX_{n_0}$$

$$= \frac{2(n_0+1)}{n_0+2} < 2.$$

另一方面，

$$\lim_n EX_n = \lim_n \frac{2(n+1)}{n+2} = 2.$$

故$V=2$，任何停时都不是最优的。

§5 最优停时的特征与唯一性准则

上节证明了：在条件A^+下，σ是最优停时。现在问：是否还有其它的最优停时？为此需要认识最优停时的特征。我们可以在较弱的条件下进行讨论。引进条件：

$$L: \ EX_n^- < \infty \ (一切 n \geqslant 0).$$

引理5.1 设条件A^+及L成立，则对任何停时$t \geqslant n$，有

$$E(\gamma_t \mid \mathscr{F}_n) \leqslant \gamma_n \ \text{(a.s.)}.$$

证明 用反证法。设有某个$n \geqslant 0$及停时$t \geqslant n$使得

$$P(E(\gamma_t \mid \mathscr{F}_n) > \gamma_n) > 0.$$

记$B=\{E(\gamma_t \mid \mathscr{F}_n) > \gamma_n\}$。从定理4.2知$E(X_{\sigma_k} \mid \mathscr{F}_k)=\gamma_k$，这里$\sigma_k$之定义见§4。令

$$\tau = \sum_{n \leqslant k < \infty} \sigma_k I_{B \cap (t=k)} + \infty \cdot I_{B^c \cup (t=\infty)}.$$

易知τ是停时，$\tau \geqslant n$，

$$\int_B X_\tau \mathrm{d}P = \sum_{n \leqslant k < \infty} \int_{B \cap (t=k)} X_{\sigma_k} \mathrm{d}P + \int_{B \cap (t=\infty)} X_\infty \mathrm{d}P$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \int_{B \cap (t=k)} \gamma_k \mathrm{d}P + \int_{B \cap (t=\infty)} \gamma_\infty \mathrm{d}P$$

$$= \int_B \gamma_t \mathrm{d}P > \int_B \gamma_n \mathrm{d}P.$$

这与$E(X_\tau|\mathscr{F}_n)\leqslant\gamma_n$ (a.s.)相矛盾，从而也就证明了引理5.1。

系5.1 设条件A^-及L成立，则对任何停时τ,η，只要$\eta\geqslant\tau$，则必有

$$E(\gamma_\eta|\mathscr{F}_\tau)\leqslant\gamma_\tau \quad (\text{a.s.}). \tag{5.2}$$

证明 任意给定$B\in\mathscr{F}_\tau$，$n\geqslant0$，有$B\cap\{\tau=n\}\in\mathscr{F}_n$。从引理5.1知

$$\int_{\{\tau=n\}\cap B}\gamma_\eta\mathrm{d}P=\int_{\{\tau=n\}\cap B}\gamma_{\eta\vee n}\mathrm{d}P\leqslant\int_{\{\tau=n\}\cap B}\gamma_n\mathrm{d}P=\int_{\{\tau=n\}\cap B}\gamma_\tau\mathrm{d}P,$$

故

$$\int_{\{\tau<\infty\}\cap B}\gamma_\eta\mathrm{d}P\leqslant\int_{\{\tau<\infty\}\cap B}\gamma_\tau\mathrm{d}P.$$

又$\{\tau=\infty\}\subset\{\eta=\infty\}$，于是

$$\int_B\gamma_\eta\mathrm{d}P\leqslant\int_B\gamma_\tau\mathrm{d}P,$$

这就证明了(5.2)成立。

用“鞅论”的语言来说，我们证明了$(\gamma_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant0)$是正则上鞅。下面指出，系5.1中的条件可以减弱。令

$$X_n(b)=\min(X_n,b)\quad(b\geqslant0),$$

$$\gamma_n(b)=\mathrm{e.sup}\{E(X_\tau(b)|\mathscr{F}_n):\ \tau\geqslant n,\ \tau\text{是停时}\}.$$

引理5.2 设条件L成立，则对一切$n\geqslant0$，

$$\lim_{b\to\infty}\gamma_n(b)=\gamma_n\quad(\text{a.s.}). \tag{5.3}$$

证明 任意给定停时$t\in C_n$（即$t\geqslant n$，EX_t存在），令

$$\tau=\begin{cases}t, & \text{当}\omega\in\{E(X_t|\mathscr{F}_n)\geqslant X_n\},\\ n, & \text{否则}.\end{cases}$$

易知τ是停时，$\tau\geqslant n$，$EX_\tau^-<\infty$，且

$$E(X_\tau|\mathscr{F}_n)\geqslant E(X_t|\mathscr{F}_n).$$

从引理5.1知

$$E(X_\tau(b)|\mathscr{F}_n)\leqslant E(\gamma_\tau(b)|\mathscr{F}_n)\leqslant\gamma_n(b)\quad(\text{a.s.}).$$

但$X_\tau(0)\geqslant -X_\tau^-$，令$b\nearrow\infty$，利用单调收敛定理知

$$E(X_\tau|\mathscr{F}_n)\leqslant\lim_{b\to\infty}\gamma_n(b)\quad(\text{a.s.}),$$

故
$$E(x_t|\mathscr{F}_n)\leqslant\lim_{n}\gamma_n(b)\leqslant\gamma_n\quad(\text{a.s.}).$$

由于t是C_n中任意停时，故

$$\gamma_n\leqslant\lim_{n}\gamma_n(b)\leqslant\gamma_n\quad(\text{a.s.}).$$

所以(5.3)成立。证毕。

系5.2 设条件L成立，则对任何有限停时η,τ，只要$\eta\geqslant\tau$，$EX_\eta^-<\infty$，一定有

$$E(\gamma_\eta|\mathscr{F}_\tau)\leqslant\gamma_\tau\quad(\text{a.s.}).\tag{5.4}$$

证明 从系5.1知

$$E(\gamma_\eta(b)|\mathscr{F}_\tau)\leqslant\gamma_\tau(b)\leqslant\gamma_\tau\quad(\text{a.s.}).$$

但$\gamma_\eta(b)\nearrow\gamma_\eta\quad(b\to\infty)$，

$$\gamma_\eta(b)\geqslant\gamma_\eta(0)\geqslant X_\eta(0)\geqslant -X_\eta^-(\text{a.s.}),$$

令$b\to\infty$即知(5.4)成立。证毕。

下列的定理和定理5.5是薛行鸿(1985)得到的。

定理 5.1 设条件L成立，且$V<\infty$，则为了停时τ是最优的，必须且只须满足：

$$\gamma_\tau=X_\tau,\tag{5.5}$$

$$E(\gamma_\tau|\mathscr{F}_n)=\gamma_n\quad(\text{在}\{\tau\geqslant n\}\text{上}).\tag{5.6}$$

证明 充分性。设停时τ满足(5.5)和(5.6)，则$EX_\tau=E\gamma_0\geqslant V$。这表明$\tau$是最优的（$V$之定义见§4的开始部分）。

必要性。证明较长。设τ是最优停时，则$EX_\tau=V$是有限数。令$\xi=\lim\limits_{b\to\infty}\gamma_\tau(b)$。由于

$$\gamma_\tau(b)\geqslant X_\tau(b)\geqslant -X_\tau^-\quad(b\geqslant 0),$$

利用单调收敛定理知

$$E\xi=\lim_{b\to\infty}E(\gamma_\tau(b)).$$

根据引理5.1知

$$E(\gamma_\tau(b)) \leqslant E\gamma_0(b) \leqslant V,$$

于是$E\xi \leqslant V = EX_\tau$；另一方面，从引理 5.2 知，在$\{\tau<\infty\}$上$\xi=\gamma_\tau$，又$\tau=\infty$时，$\gamma_\infty(b)=\overline{\lim\limits_n}\,\gamma_n(b)=X_\infty\wedge b$，故在$\Omega$上$\xi\geqslant X_\tau$ (a.s.)。从$E\xi=EX_\tau$推知，在$\{\tau<\infty\}$上

$$\gamma_\tau = X_\tau \quad (\text{a.s.})。$$

为了得到(5.6)，首先来证：对任何停时$t\in C_n$，有

$$I_{\{\tau\geqslant n\}}E(X_\tau|\mathscr{F}_n)\geqslant I_{\{\tau\geqslant n\}}E(X_t|\mathscr{F}_n)。\tag{5.7}$$

用反证法。设有$t\in C_n$，使得$P(B)>0$，这里

$$B=\{I_{\{\tau\geqslant n\}}E(X_\tau|\mathscr{F}_n)<I_{\{\tau\geqslant n\}}E(X_t|\mathscr{F}_n)\}。$$

令$S=tI_B+\tau I_{B^c}$，则S是停时，且

$$EX_S=\int_B X_t\,\mathrm{d}P+\int_{B^c}X_\tau\,\mathrm{d}P>\int_B X_\tau\,\mathrm{d}P+\int_{B^c}X_\tau\,\mathrm{d}P=EX_\tau,$$

这与τ的最优性相矛盾，故(5.7)成立。

从(5.7)知

$$I_{\{\tau\geqslant n\}}E(X_\tau|\mathscr{F}_n)\geqslant I_{\{\tau\geqslant n\}}\gamma_n \quad (\text{a.s.})。$$

另一方面

$$I_{\{\tau\geqslant n\}}E(X_\tau|\mathscr{F}_n)=I_{\{\tau\geqslant n\}}E(X_{\tau\vee n}|\mathscr{F}_n)\leqslant I_{\{\tau\geqslant n\}}\gamma_n \quad (\text{a.s.})。$$

于是

$$I_{\{\tau\geqslant n\}}E(X_\tau|\mathscr{F}_n)=I_{\{\tau\geqslant n\}}\gamma_n \quad (\text{a.s.})。\tag{5.8}$$

由于X_τ可积，利用Levy 定理知$X_\infty=\gamma_\infty$(在$\{\tau=\infty\}$上a.s.成立)。这就证明了(5.5)成立。从(5.5)和(5.8)直接得到(5.6)。证毕。

定理5.2 设条件A^+和L成立。为了停时τ是最优的，必须且只须满足：

$$\gamma_n=\begin{cases}X_n, & 当\tau=n,\\ E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n), & 当\tau>n。\end{cases}\tag{5.9}$$

证明 充分性。从定理 4.1 即知，而且不需要条件L。现在来证必要性。设τ是最优的，从定理5.1知$\gamma_\tau=X_\tau$ (a.s.)，且

$$I_{\{\tau>n\}}E(X_\tau|\mathscr{F}_{n+1})=I_{\{\tau>n\}}\gamma_{n+1} \quad (\text{a.s.})。$$

此式两边对$\mathscr{F}_n$取条件期望，得

$$I_{(\tau>n)}E(X_\tau|\mathscr{F}_n)=I_{(\tau>n)}E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n).$$

再利用(5.8)知

$$I_{(\tau>n)}\gamma_n=I_{(\tau>n)}E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n).$$

这就证明了(5.9)成立。证毕。

从定理5.2看出，在条件A^+及L下，上节定义的停时σ是最小的最优停时。

定理5.3 设条件L成立且$V<\infty$。如果最优停时存在，则σ就是一个最优停时。

证明 设τ是最优停时，从定理5.1知

$$\gamma_\tau=X_\tau\ \ (\text{a.s.}),$$

故$\tau\geqslant\sigma$ (a.s.)。从系5.1知

$$E(\gamma_\sigma(b))\geqslant E(\gamma_\tau(b)),$$

$$E\gamma_\sigma(0)\geqslant E\gamma_\tau(0)\geqslant-EX_\tau^->-\infty,$$

故

$$E(\lim_{b\to\infty}\gamma_\sigma(b))\geqslant E(\lim_{b\to\infty}\gamma_\tau(b)).$$

但

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty}\gamma_\sigma(b)&=I_{(\sigma<\infty)}\gamma_\sigma+I_{(\sigma=\infty)}\lim_b\gamma_\infty(b)\\&=I_{(\sigma<\infty)}\gamma_\sigma+I_{(\sigma=\infty)}X_\infty=X_\sigma,\end{aligned}$$

$$\lim_b\gamma_\tau(b)=I_{(\tau<\infty)}\gamma_\tau+I_{(\tau=\infty)}X_\infty=X_\tau,$$

于是$EX_\sigma\geqslant EX_\tau$，这表明$\sigma$也是最优停时。证毕。

定理5.4 设条件L成立且$V<\infty$，又对一切$n\geqslant0$，

$$P(\sigma=n,\ E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)=\gamma_n)=0, \tag{5.10}$$

则最优停时至多有一个。

证明 设τ是任一最优停时，当然$\tau\geqslant\sigma$ (a.s.)，于是

$$I_{(\tau>n)}E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)=I_{(\tau>n)}E(\gamma_\tau|\mathscr{F}_n)=I_{(\tau>n)}\gamma_n,$$

故

$$\{\tau>n=\sigma\}\subset\{\sigma=n,\ E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)=\gamma_n\}.$$

从(5.10)知$P(\tau>n=\sigma)=0$，所以$P(\tau>\sigma)=0$，从而$\tau=\sigma$ (a.s.)。

这表明最优停时至多有一个。证毕。

定理5.5(唯一性准则)　设条件A^+及L成立，则当且仅当(5.10)成立时，σ是唯一的最优停时。

证明　充分性显然。以下证明必要性.设有$n\geqslant 0$使得$P(B_n)>0$,这里

$$B_n=\{\sigma=n,\ E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)=\gamma_n\}.$$

令

$$t=\begin{cases}\sigma, & \omega\in B_n,\\ \sigma_{n+1}, & \omega\bar{\in} B_n,\end{cases}$$

这里

$$\sigma_{n+1}=\inf\{k:\ k\geqslant n+1,\ \gamma_k=X_k\}.$$

易知t是停时。从§4知

$$E(X_{\sigma_{n+1}}|\mathscr{F}_{n+1})=\gamma_{n+1},$$

故在B_n上

$$E(X_{\sigma_{n+1}}|\mathscr{F}_n)=E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)=X_n.$$

于是

$$EX_t=\int_{B_n^c}X_\sigma dP+\int_{B_n}X_{\sigma_{n+1}}dP$$

$$=\int_{B_n^c}X_\sigma dP+\int_{B_n}X_n dP=EX_\sigma.$$

这表明t也是最优停时。但是

$$P(t\neq\sigma)\geqslant P(B_n)>0,$$

可见最优停时不只一个。这就证明了(5.10)是最优停时唯一的必要条件。证毕。

定理5.6　设$E|X_n|<\infty(n\geqslant 0)$，$V=\infty$且存在最优停时$\tau$，则有下列结论：

① 如果$P(\tau<\infty)>0$，则最优停时有无穷多个；

② 如果$P(\tau=\infty)=1$，则最优停时唯一的充要条件是$\mathscr{F}_n$由一些零概率集合及其余集组成。

证明 先证①。若$P(\tau<\infty)>0$，则有n满足$P(\tau=n)>0$。任意给定$k>n$，令

$$t_k=\begin{cases}\tau, & \tau\neq n\text{时},\\ k, & \tau=n\text{时},\end{cases}$$

则t_k是停时且$P(t_k\neq\tau)>0$，

$$EX_{t_k}=\int_{\{\tau\neq n\}}X_\tau \mathrm{d}P+\int_{\{\tau=n\}}X_k\mathrm{d}P=\infty.$$

这是因为$EX_\tau=V=\infty$而

$$\int_{\{\tau=n\}}X_\tau\mathrm{d}P\leqslant\int_{\{\tau=n\}}|X_n|\mathrm{d}P<\infty.$$

可见此时有无穷多个最优停时。

若最优停时只有一个，且$P(\tau=\infty)=1$，我们来证明：如果$A\in\mathscr{F}_n$，则$P(A)=1$或0。

用反证法。若有$A\in\mathscr{F}_n$，$0<P(A)<1$。因为$EX_\infty=\infty$，不妨设$\int_A X_\infty\mathrm{d}P=\infty$（否则考虑$A^C$）。

令

$$t=\begin{cases}\infty, & A\text{上},\\ n, & A^C\text{上},\end{cases}$$

则t是停时，$P(t\neq\infty)>0$且$EX_t=\infty$。这与∞是唯一的最优停时相矛盾，故$P(A)=1$或0。

反之，若$\mathscr{F}_n$中的集合的概率非0即1，则任一停时概率为一地等于常数。因为$E|X_n|<\infty$，故最优停时概率为一地等于∞。证毕。

§6 逼近定理及有界性准则

从上节知道，在条件A^+下σ是最优停时。如何求出σ呢？这涉及到如何计算γ_n。由于序列$(X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant0)$没有最后元素，$\gamma_n$的计算一般是很困难的（在某些特殊情况下有办法求，见§8）。但是在一定条件下，γ_n可用有限时间内的量来逼近，从而最优停

时 σ 也可用有限时间内相应的量来逼近。而对于有限时间的情形，可使用§2中介绍过的后退归纳法。本节就是来讨论这种逼近，并给出保证最优停时有界的条件。

假设$(X_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0)$满足条件$L$，即有$EX_n^- < \infty (n\geqslant 0)$。固定非负整数$N$，研究$(X_n, \mathscr{F}_n, 0\leqslant n\leqslant N)$的最优停止问题。令

$$\begin{aligned} &\gamma_N^N \triangleq X_N, \\ &\gamma_n^N \triangleq \max(X_n,\ E(\gamma_{n+1}^N | \mathscr{F}_n)), \end{aligned} \tag{6.1}$$

其中$n = N-1, \cdots, 1, 0$。

$$s^N \triangleq \inf\{k:\ 0\leqslant k\leqslant N,\ \gamma_k^N = X_k\}.$$

从定理2.1知

$$E(X_{s^N} | \mathscr{F}_0) = \gamma_0^N \ (\text{a.s.}),$$

$$EX_{s^N} = \sup\{EX_\tau:\ \tau \text{ 是停时},\ 0\leqslant \tau\leqslant N\}.$$

自然提出下列问题：

① 关系式$\lim\limits_{N\to\infty} EX_{s^N} = V$是否成立？这里

$$V = \sup\{EX_\tau:\ \tau \text{ 是停时},\ EX_\tau \text{ 存在}\}.$$

② $s \triangleq \lim\limits_N s^N$ 是否是$(X_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0)$之最优停时？

我们指出，如不添加适当的条件，这两个问题有时答案是否定的。

例6.1 设$y_0, y_1, \cdots$是相互独立随机变量列，y_i取值1或-1，

$$p(y_i = 1) = p(y_i = -1) = \frac{1}{2} \quad (i\geqslant 0),$$

$$\mathscr{F}_n = \sigma(y_0, y_1, \cdots, y_n) \quad (n\geqslant 0),$$

$$X_n = \min(1, y_0 + \cdots + y_n) - \frac{n+1}{n+2} \quad (n\geqslant 0).$$

我们来研究序列$(X_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0)$的最优停止问题。首先指出

$$E(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \leqslant X_n \quad (\text{a.s.}). \tag{6.2}$$

实际上，因为

$$\min(1,x) \geqslant \frac{1}{2}(\min(1,x+1)+\min(1,x-1)),$$

对任何 $A \in \mathscr{F}_n$,

$$\begin{aligned}
&\int_A X_{n+1} \mathrm{d}P \\
&= \int_{A \cap \{y_{n+1}=1\}} \min(1, y_0+\cdots+y_n+1) \mathrm{d}P \\
&\quad + \int_{A \cap \{y_{n+1}=-1\}} \min(1, y_0+\cdots+y_n-1) \mathrm{d}P - \frac{n+2}{n+3}P(A) \\
&= \frac{1}{2}\int_A \min(1, y_0+\cdots+y_n+1) \mathrm{d}P \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_A \min(1, y_0+\cdots+y_n-1) \mathrm{d}P - \frac{n+2}{n+3}P(A) \\
&\leqslant \int_A \min(1, y_0+\cdots+y_n) \mathrm{d}P - \frac{n+1}{n+2}P(A) \\
&= \int_A X_n \mathrm{d}P.
\end{aligned}$$

这就证明了(6.2)(即$(X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0)$ 是上鞅)。故从(6.1)知 $\gamma_n^N = X_n$(a.s.)$(0 \leqslant n \leqslant N)$，从而 $s^N = 0$(a.s),

$$EX_{s^N} = EX_N = -\frac{1}{2}.$$

令

$$t = \inf\{n:\ n \geqslant 0,\ y_0+\cdots+y_n = 1\}.$$

利用 Chung－Fuchs 定理(见第二章§3)知 $P(t<\infty)=1$。由于 $x_t = 1 - \frac{t+1}{t+2} = \frac{1}{t+2}$，故

$$0 < X_t \leqslant \frac{1}{2}, \quad 0 < EX_t \leqslant \frac{1}{2}.$$

我们指出，这个 t 是最优停时。实际上，任意给定停时 u，记 $Z_n=\min(1,s_n)$，这里 $S_n=y_0+\cdots+y_n$。注意 $X_u\leqslant\frac{1}{2}$，$X_\infty=\frac{1}{2}$，知 EX_u 存在且

$$\begin{aligned}EX_u &= \int_{\{u<t\}} X_u \mathrm{d}P+\int_{\{u\geqslant t\}} X_u \mathrm{d}P \\ &= \int_{\{u<t\}} X_u \mathrm{d}P+\int_{\{u\geqslant t\}}\left(Z_u-\frac{u+1}{u+2}\right)\mathrm{d}P \\ &\leqslant \int_{\{u<t\}} X_u \mathrm{d}P+\int_{\{u\geqslant t\}}\left(1-\frac{t+1}{t+2}\right)\mathrm{d}P \\ &= \int_{\{u<t\}} X_u \mathrm{d}P+\int_{\{u\geqslant t\}} X_t \mathrm{d}P.\end{aligned}$$

但 $u<t$ 时，$s_u\leqslant 0$，从而 $X_u<0<X_t$，故

$$\int_{\{u<t\}} X_u \mathrm{d}P\leqslant\int_{\{u<t\}} X_t \mathrm{d}P.$$

总之，$EX_u\leqslant EX_t$，这表明 t 是最优停时。$V=EX_t>0$。可见 $\lim\limits_N s^N=0$(a.s.)，$\lim\limits_N s^N$ 不是最优的，而且

$$EX_{s^N}\equiv-\frac{1}{2}<V.$$

这个例子表明，即使 A' 成立，有时还不能用有限时间内的量作为无穷时间内的量的近似值。

然而却有下列逼近定理：

定理6.1 设 $(X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$ 满足：

① $X_n=X'_n-X''_n\ (n\geqslant 0)$；

② $E(\sup\limits_{n\geqslant 0}|X'_n|)<\infty$；

③ $X''_n\geqslant 0$，X''_n 对 n 不减，$EX''_n<\infty\ (n\geqslant 0)$，则有下列结论：

(1) $\lim\limits_{N\to\infty} EX_{s^N} = V$; (6.3)

(2) $\sigma = \sup\limits_{N\geq 1} s^N$(a.s.)，而且 σ 是最优停时，这里

$$\sigma = \inf\{n;\ n\geq 0,\ \gamma_n = X_n\}。$$

为了证明这个定理，先证明一个引理，它揭示了 γ_n^N 的直观意义。

引理6.1 设$(X_n, \mathscr{F}_n, 0\leq n\leq N)$满足：$EX_n^+<\infty (n=0,1,\cdots,N)$，则对一切 $0\leq n\leq N$，有

$$\gamma_n^N = \text{e.sup}\{E(X_\tau|\mathscr{F}_n);\ \tau\in\mathscr{M}(n,N)\}(\text{a.s.}),$$

这里

$$\mathscr{M}(n,N) = \{\tau;\ \tau\text{ 是停时且 } n\leq\tau\leq N\}。$$

证明 对 n 作后退归纳法。$n=N$ 时结论显然成立。设 $n=k$ 时结论成立，我们来研究 $n=k-1$ 的情形$(k\geq 1)$。对任何 $\tau\in\mathscr{M}(k-1,N)$,

$$\begin{aligned}E(X_\tau|\mathscr{F}_{k-1}) &= I_{(\tau=k-1)}X_{k-1} + I_{(\tau\geq k)}E\{E(X_{\tau\vee k}|\mathscr{F}_k)|\mathscr{F}_{k-1}\}\\ &\leq I_{(\tau=k-1)}X_{k-1} + I_{(\tau\geq k)}E(\gamma_k^N|\mathscr{F}_{k-1})\\ &\leq \max(X_{k-1}, E(\gamma_k^N|\mathscr{F}_{k-1})) = \gamma_{k-1}^N \quad (\text{a.s.})。\end{aligned}$$

故

$$\text{e.sup}\{E(X_\tau|\mathscr{F}_{k-1});\ \tau\in\mathscr{M}(k-1,N)\}\leq\gamma_{k-1}^N \quad (\text{a.s.})。$$

另一方面，从系 2.1 知 $E(X_{\sigma_{n-1}}|\mathscr{F}_{n-1}) = \gamma_{n-1}^N$(a.s.)，这里

$$\sigma_{n-1} = \inf\{i;\ n-1\leq i\leq N, \gamma_i^N = X_i\}。$$

所以 $n=k-1$ 时，引理 6.1 的结论也成立。根据归纳法原理，对一切 $0\leq n\leq N$，结论成立。证毕。

定理 6.1 的证明 显然条件 A^+ 成立，故 σ 是最优停时。从系 4.1 知，$\tilde{V}=V$，这里

$$\tilde{V} = \sup\{EX_\tau;\ \tau\text{ 是有限停时且 } EX_\tau\text{ 存在}\}。$$

由于 EX_{s^N} 对 N 单调上升，知 $\lim\limits_N EX_{s^N}$ 存在。以下我们指出，对任何有限停时 t，

$$EX_t\leq\lim_N EX_{s^N}。 \tag{6.4}$$

当 $EX_t=-\infty$ 时，(6.4)当然成立.以下设 $EX_t>-\infty$，于是 EX_t 是有限数，从而 $EX_t=EX'_t-EX''_t$，EX''_t 是有限数．由于

$$\int_{\{t>n\}} X_n^- dP \leqslant \int_{\{t>n\}} \sup_k |X'_k| dP + \int_{\{t>n\}} |X''_t| dP$$

所以

$$\lim_n \int_{\{t>n\}} X_n^- dP = 0.$$

但是

$$\begin{aligned} EX_t &= \int_{\{t\leqslant N\}} X_t dP + \int_{\{t>N\}} X_t dP \\ &\leqslant EX_{t\wedge N} - \int_{\{t>N\}} X_N dP + \int_{\{t>N\}} X_t dP \\ &\leqslant EX_{s^N} + \int_{\{t>N\}} X_N^- dP + \int_{\{t>N\}} X_t dP. \end{aligned}$$

令 $N\to\infty$，得

$$EX_t \leqslant \lim_N EX_{s^N} \leqslant V = EX_\sigma.$$

由于 t 是任意的有限停时，故 $\lim\limits_N EX_{s^N}=V$．这就得到了(6.3)．

剩下的是要证明 $\sigma=\sup\limits_N s^N$(a.s.)．注意 s^N 对 N 单调上升，利用 Fatou 引理知

$$E(X_{\sup s^N}) = E(\lim_N X_{s^N}) \geqslant \lim_N EX_{s^N} = V,$$

这表明 $\sup\limits_N s^N$ 也是最优停时，从而 $\sup\limits_N s^N \geqslant \sigma$(据定理 5.2)．另一方面，从引理 6.1 知 $\gamma_n^N \leqslant \gamma_n$(a.s.)，于是，$s^N \leqslant \sigma$(a.s.)．所以 $\sup\limits_N s^N=\sigma$(a.s.)．证毕．

现在来研究逼近定理能够成立的极端情形：存在最优停时是有界的．

定理6.2 设条件 L 成立，且

① $\lim\limits_N \gamma_0^N = \gamma_0$(a.s.)；　　　　(6.5)

② 对某个 $k\geqslant 0$，存在 n_k 满足：对一切 $n\geqslant n_k$，有

$$\gamma_{n-k}^{n+1}=\gamma_{n-k}^{n}(\text{a.s.}), \tag{6.6}$$

则 $\gamma_0^{n_k}=\gamma_0(\text{a.s.})$，从而有最优停时 $\tau_0\leqslant n_k$.

证明 实际上，从(6.6)知

$$\begin{aligned}\gamma_{n-k-1}^{n+1}&=\max(X_{n-k-1},\ E(\gamma_{n-k}^{n+1}\mid\mathscr{F}_{n-k-1}))\\&=\max(X_{n-k-1},E(\gamma_{n-k}^{n}\mid\mathscr{F}_{n-k-1}))=\gamma_{n-k-1}^{n}.\end{aligned}$$

于是对一切 $n\geqslant n_k$，有

$$\gamma_i^{n+1}=\gamma_i^n\quad(i=0,1,\cdots,n-k).$$

特别 $\gamma_0^{n+1}=\gamma_0^n$。故

$$\gamma_0^n=\gamma_0^{n_k}\quad(n\geqslant n_k).$$

由条件(6.5)知 $\gamma_0^{n_k}=\gamma_0$，因此有停时 $s\leqslant n_k$ 使得

$$EX_s=E\gamma_0^{n_k}=E\gamma_0\ ,$$

这 s 当然是最优停时。证毕。

为了保证条件(6.5)满足，引入条件

$$A^-:\ E(\sup_{n\geqslant 0}X_n^-)<\infty.$$

引理6.2 设 A^- 成立，则 $\lim\limits_N\gamma_n^N=\gamma_n(\text{a.s.})$。

证明 仿效引理 6.1 的证法知

$$\gamma_n^N=\text{e.sup}\{E(X_\tau\mid\mathscr{F}_n):\ \tau\ 是停时且\ n\leqslant\tau\leqslant N\}.$$

于是对任何有限停时 $t\geqslant n$，有

$$\gamma_n^N\geqslant E(X_{t\wedge N}\mid\mathscr{F}_n).$$

由于 $X_{t\wedge N}\geqslant-\sup\limits_{k\geqslant 0}X_k^-$，从 Fatou 引理知

$$\underline{\lim_N}\gamma_n^N\geqslant E(\underline{\lim_N}X_{t\wedge N}\mid\mathscr{F}_n)=E(X_t\mid\mathscr{F}_n).$$

由于 t 的任意性及系 4.1 和引理 5.2 知 $\underline{\lim\limits_N}\gamma_n^N\geqslant\gamma_n$。另一方面，$\gamma_n^N\leqslant\gamma_n$。故 $\lim\limits_n\gamma_n^N=\gamma_n(\text{a.s.})$。证毕。

下面的定理给出了最优停时有界的简单充分条件，十分好用.

定理6.3 设条件 A^- 成立且存在正整数 n_0 满足：对一切 $n\geqslant n_0$，$E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n$(a.s.)，则存在最优停时 $\tau_0\leqslant n_0$。

证明 注意

$$\gamma_n^{n+1}=\max(X_n,E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)),\gamma_n^n=X_n,$$

于是条件"$E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n$"等价于"$\gamma_n^{n+1}=\gamma_n^n$"，即条件(6.6)当$k=0$时成立，利用引理6.2和定理6.2，就知有最优停时 $\tau_0\leqslant n_0$。证毕。

§7 单调情形下的最优停止

设序列为$(X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$。令

$$A_n=\{X_n\geqslant E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\}. \tag{7.1}$$

定义7.1 称$(X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$处于单调情形，若对一切 $n\geqslant 0$，$A_n\subset A_{n+1}$。

和随机变量间的不等式一样，集合的包含关系也允许差一零概率集。例如"$A_n\subset A_{n+1}$"意味着 A_n-A_{n+1} 为一零概率集。令

$$s=\inf\{n;\ n\geqslant 0,\ E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n\}. \tag{7.2}$$

我们非常关心停时 s 是否是最优停时。

定理7.1 设$(X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$处于单调情形，条件 L 成立，$P(s<\infty)=1$，EX_s 存在且对任何有限停时t，$\lim\limits_n\int_{\{t>n\}}X_n^-dP=0$，又 $\lim\limits_n\int_{\{s>n\}}X_n^+dP=0$，则 s 是所有有限停时中最优的，即对任何有限停时 t，$EX_s\geqslant EX_t$（条件 L 的含义见§5）。

为了证明这个定理，先证明两个引理。

引理7.1 对于单调情形，若 L 成立，则对一切 $0\leqslant n\leqslant N-1$，

$$E(\gamma_{n+1}^N|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n\ （在\ A_n\ 上）. \tag{7.3}$$

证明 对 n 作后退归纳法。当 $n=N-1$ 时，(7.3)显然成立。设 $n=j+1$ 时(7.3)成立，则在 A_j 上

$$\gamma_{j+1}^N=\max(X_{j+1},\ E(\gamma_{j+2}^N|\mathscr{F}_{j+1}))=X_{j+1},$$

于是知

$$I_{A_j}E(\gamma_{j+1}^N|\mathscr{F}_j)=E(I_{A_j}\gamma_{j+1}^N|\mathscr{F}_j)=I_{A_j}E(X_{j+1}|\mathscr{F}_j)$$
$$\leqslant I_{A_j}X_j,$$

故 $n=j$ 时(7.3)成立。按归纳法原理(7.3)对一切 $n\leqslant N-1$ 均成立。证毕。

引理7.2 对于单调情形，若 L 成立，则

$$s^N=\min(s,N), \tag{7.4}$$

这里

$$s^N\triangleq\inf\{k:\ 0\leqslant k\leqslant N,\ \gamma_k^N=X_k\}\quad(N\geqslant 0)。$$

证明 令 $s_N=\min(s,N)$。设 $n<N$，在集合 $\{s_N=n\}$ 上

$$E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n,$$

从引理 7.1 知 $E(\gamma_{n+1}^N|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n$，从而在$\{s_N=n\}$上，

$$\gamma_n^N=\max(X_n,\quad E(\gamma_{n+1}^N|\mathscr{F}_n))=X_n,$$

故 $s^N\leqslant n=s_N$。在集合$\{s_N=N\}$上当然有 $s_N\geqslant s^N$，总之 $s^N\leqslant s_N$。另一方面，对任何 $n\leqslant N$，在集合$\{s^N=n\}$上，$\gamma_n^N=X_n$，故 $E(\gamma_{n+1}^N|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n$，但 $\gamma_{n+1}^N\geqslant X_{n+1}$，所以 $E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n$，从而 $s\leqslant n$，于是 $s_N\leqslant n=s^N$。总之 $s_N=s^N$(a.s.)。证毕。

定理7.1的证明 从引理 7.2 知 $s=\sup_N s^N$，对任何有限停时 t，只要 EX_t 存在，则

$$EX_t=\lim_N\int_{\{t\leqslant N\}}X_t\,\mathrm{d}P$$
$$=\lim_N\int_{\{t\leqslant N\}}X_{t\wedge N}\,\mathrm{d}P$$
$$\leqslant\lim_N\left(EX_{t\wedge N}+\int_{\{t>N\}}X_N^-\,\mathrm{d}P\right)$$

$$\leqslant \lim_N EX_{s^N}$$

$$\leqslant \lim_N \int_{\{s\leqslant N\}} X_s dP + \overline{\lim_N} \int_{\{s>N\}} X_s^+ dP = EX_s.$$

这表明 s 是所有有限停时中最优的。证毕。

引理7.3 对于单调情形，若 A^- 成立，则

$$I_{\{s=n\}}\gamma_{n+1} = I_{\{s=n\}}X_{n+1} \quad (\text{a.s.}), \tag{7.5}$$

这里 s 的定义见(7.2)。

证明 从引理 7.1 知，在 A_{n+1} 上 $E(\gamma_{n+2}^N|\mathscr{F}_{n+1})\leqslant X_{n+1}$，故在 A_n 上，

$$\gamma_{n+1}^N = \max(X_{n+1}, E(\gamma_{n+2}^N|\mathscr{F}_{n+1})) = X_{n+1}.$$

令 $N\to\infty$，知在 A_n 上 $\gamma_{n+1} = X_{n+1}$，但$\{s=n\}\subset A_n$，故(7.5)成立。证毕。

定理7.2 设$(X_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0)$处于单调情形，且

$$E(\sup_{n\geqslant 0}|X_n|)<\infty,$$

则最优停时唯一的充要条件是：对一切 $n\geqslant 0$，

$$P(s=n, X_n = E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)) = 0. \tag{7.6}$$

证明 从定理 6.1 知 $\sigma = \sup_N s^N = s$ 是最优停时，根据定理 5.4，最优停时唯一的充要条件是

$$P(\sigma = n, X_n = E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)) = 0 \quad (n\geqslant 0).$$

现在 $\sigma = s$，$\gamma_{s+1} = X_{s+1}$(a.s.)，故

$$I_{\{\sigma=n\}}E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)$$

$$= I_{\{s=n\}}E(I_{\{s=n\}}\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n) = I_{\{s=n\}}E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n).$$

可见(7.6)是最优停时唯一的充要条件。证毕。

例7.1 设想有一窃贼，每天偷一户人家，他各天偷得的物品的价值组成一列独立同分布的正值随机变量 $y_1, y_2, \cdots$（设$0<Ey_1<\infty$）。每天他被抓住(因而被迫归还全部赃物)的概率为 p $(0<p<1)$。我们假定该窃贼在第 n 天被抓住这一事件与过去已发生的一切是独立的。问题是该窃贼应如何最明智地选择洗手不

于的时间？

设 $\delta_1,\delta_2,\cdots$ 是独立随机变量列，$\delta_i=0$ 或 1，

$$p=P(\delta_i=0)=1-P(\delta_i=1)\quad (i\geqslant 1)。$$

设 $\{y_n,n\geqslant 1\}$ 与 $\{\delta_n,n\geqslant 1\}$ 相互独立。令

$$\mathscr{F}_n=\sigma(y_1,\cdots,y_n,\delta_1,\cdots,\delta_n)\quad (n\geqslant 1),$$

$$X_n=\prod_{i=1}^{n}\delta_i\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i\quad (n\geqslant 1).$$

易知 X_n 是该窃贼第 n 天后手中积累的赃物的价值。问题化为寻求序列 $(X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1)$ 的最优停时（现在的参数从 1 开始，当然可用上面讲过的理论）。

显然 $X_n\geqslant 0$，故条件 A 成立。下面指出条件 A^+ 也成立，而且这个序列处于单调情形。

实际上，

$$E(\sup_{n\geqslant 1} X_n^+)\leqslant E\left(\sum_{n=1}^{\infty}X_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}EX_n=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(\delta_1=1,\cdots,\delta_n=1)}\sum_{1}^{n}y_i\,\mathrm{d}P$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}P(\delta_1=1,\cdots,\delta_n=1)\cdot E\left(\sum_{1}^{n}y_i\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^n nEy_1<\infty,$$

故 A^+ 成立。

$$E(X_{n+2}\mid\mathscr{F}_{n+1})=E\left(\prod_{i=1}^{n+2}\delta_i\cdot\sum_{i=1}^{n+2}y_i\mid\mathscr{F}_{n+1}\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n+1}\delta_i\cdot\sum_{i=1}^{n+1}y_i\cdot E(\delta_{n+2}\mid\mathscr{F}_{n+1})$$

$$+\prod_{i=1}^{n+1}\delta_i\cdot E(\delta_{n+2}y_{n+2}\mid\mathscr{F}_{n+1})$$

$$=X_{n+1}E\delta_{n+2}+\prod_{i=1}^{n+1}\delta_i\cdot E\delta_{n+2}\cdot Ey_{n+2}$$

$$= (1-p)\left[X_{n+1} + \prod_{i=1}^{n+1}\delta_i \cdot Ey_1\right].$$

可见“$E(X_{n+2}|\mathscr{F}_{n+1}) \leqslant X_{n+1}$”成立之充要条件是：

$$\prod_{i=1}^{n+1}\delta_i \cdot \left(\sum_{i=1}^{n+1} y_i - \frac{1-p}{p}Ey_1\right) \geqslant 0$$

成立。

于是在集合$\{E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) \leqslant X_n\}$上，

$$\prod_{i=1}^{n}\delta_i \cdot \left(\sum_{1}^{n} y_i - \frac{1-p}{p}Ey_1\right) \geqslant 0.$$

由于 $y_{n+1} \geqslant 0$，故

$$\prod_{i=1}^{n+1}\delta_i \left(\sum_{1}^{n+1} y_i - \frac{1-p}{p}Ey_1\right) \geqslant 0,$$

从而 $E(X_{n+2}|\mathscr{F}_{n+1}) \leqslant X_{n+1}$。这表明$(X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1)$处于单调情形，且

$$\sigma = s = \inf\{n: X_n \geqslant E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\}$$

$$= \inf\left\{n: \left(\prod_{1}^{n}\delta_i\right)\left(\sum_{1}^{n} y_i - \frac{1-p}{p}Ey_1\right) \geqslant 0\right\},$$

这里 s 是最优停时。由于 $\lim\limits_{n} \sum\limits_{1}^{n} y_i = \infty$(a.s.)，故 s 是有限的。这个 s 可写为：

$$s = \inf\left\{n: n \geqslant 1, \quad \delta_n = 0 \text{ 或 } \sum_{1}^{n} y_i \geqslant \frac{1-p}{p}Ey_1\right\}.$$

换句话说，对于窃贼来讲，累积的赃物的价值达到一定程度就应洗手不干。

我们指出，窃贼的最优停时不只一个。实际上，

$$P(s=1, \ E(X_2|\mathscr{F}_1) = X_1) = P\left(s=1, \delta_1\left(y_1 - \frac{1-p}{p}Ey_1\right) = 0\right)$$

$$\geqslant P(s=1, \delta_1 = 0)$$

$$=P(\delta_1=0)=p>0.$$

根据定理 7.2 知最优停时不唯一。

例7.2 设 $y_1, y_2, \cdots$ 是相互独立同分布的随机变量列，

$$E(y_1^+)^2<\infty,$$

$$P(y_1=0)<1,$$

$$\mathscr{F}_n=\sigma(y_1\cdots, y_n)\ (n\geqslant 1),$$

$$z_n=\max(y_1, \cdots, y_n),$$

$$X_n=z_n-nC\ (C\text{是正常数}).$$

研究$(X_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1)$的最优停止问题。

首先指出，条件 A^+ 是满足的。记 $Z=\sup\limits_{n\geqslant 1}X_n$。易知

$$Z=\sup_{n\geqslant 1}(y_n-nC),$$

于是

$$P(Z>u)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}P(y_k-kC\geqslant u)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\frac{1}{C}(y_1-u)>k\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{C}E(y_1-u)^+.$$

故

$$EZ^+=\int_0^{\infty}P(Z>u)\mathrm{d}u\leqslant\frac{1}{C}\int_0^{\infty}\int_{\Omega}(y_1-u)^+\mathrm{d}P\ \mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{C}\int_{\Omega}\left[\int_0^{\infty}(y_1-u)^+\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}P$$

$$\leqslant\frac{1}{C}\int_{\Omega}\int_0^{y_1^+}(y_1^+-u)\mathrm{d}u\ \mathrm{d}P$$

$$\leqslant\frac{1}{C}E(y_1^+)^2<\infty.$$

这就证明了条件 A^+ 成立。

由于 $X_n=\max(y_1,\cdots,y_n)-\frac{n}{2}C\to\frac{n}{2}C$，易知

$$\lim_n X_n=-\infty\ (\text{a.s.}).$$

容易看出，存在唯一的实数 β 满足：$E(y_1-\beta)^+=C$。我们指出：

$$\{E\{X_{n+1}|\mathscr{F}_n\}\leqslant X_n\}=\{z_n\geqslant\beta\}. \tag{7.6}$$

实际上，

$$\begin{aligned}
&E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)-X_n\\
&\quad=E((y_{n+1}-z_n)^+|\mathscr{F}_n)-C\\
&\quad=E\{(y_{n+1}-z_n)^+|\mathscr{F}_n\}-E\{(y_{n+1}-\beta)^+|\mathscr{F}_n\}.
\end{aligned}$$

可见

$$I_{\{z_n\geqslant\beta\}}(E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)-X_n)\leqslant 0,$$

所以

$$\begin{aligned}
\{z_n\geqslant\beta\}&\subset\{E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n\}\\
&=\{E((y_{n+1}-z_n)^+|\mathscr{F}_n)\leqslant E((y_{n+1}-\beta)^+|\mathscr{F}_n)\}.
\end{aligned}$$

但是

$$\{z_n<\beta\}\subset\{E((y_{n+1}-z_n)^+|\mathscr{F}_n)>E((y_{n+1}-\beta)^+|\mathscr{F}_n)\},$$

所以(7.6)成立。

从(7.6)看出，$(X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1)$处于单调情形。记

$$s=\inf\{n:\ n\geqslant1,\ E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n\}.$$

则

$$s=\inf\{n:\ n\geqslant1,z_n\geqslant\beta\}.$$

我们来证明，对一切停时 t，$EX_t\leqslant EX_s$，即 s 是最优的。

首先知

$$P(s>n)=P(y_1<\beta,\cdots,y_n<\beta)=[P(y_1<\beta)]^n\to0\ (n\to\infty).$$

故 s 是有限停时，且

$$Es<\infty.$$

$$EX_s=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\{s=n\}}(y_n-nC)\mathrm{d}P$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{y_1<\beta,\cdots,y_{n-1}<\beta,y_n\geqslant\beta\}} (y_n - nC)\,\mathrm{d}P$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(y_1<\beta,\cdots,y_{n-1}<\beta) \times \int_{\{y_n\geqslant\beta\}} (y_n - nC)\,\mathrm{d}P$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [P(y_1<\beta)]^{n-1}[C+\beta P(y_1\geqslant\beta) - nCP(y_1\geqslant\beta)]$$

$$= \frac{1}{P(y_1\geqslant\beta)}(C+\beta P(y_1\geqslant\beta))$$

$$-CP(y_1\geqslant\beta)\sum_{n=1}^{\infty} nP(y_1<\beta)^{n-1}$$

$$=\beta.$$

任意给定停时 t，若 $EX_t = -\infty$，则当然 $EX_t \leqslant EX_{t^*}$。下设 $EX_t > -\infty$。由于

$$X_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n}(y_k) - \frac{1}{2}nC - \frac{1}{2}nC \leqslant Z_1 - \frac{C}{2}n,$$

这里

$$Z_1 = \sup_{n\geqslant 1}\left[\max_{1\leqslant k\leqslant n} y_k - \frac{1}{2}nC\right].$$

由于 $EZ_1^+<\infty, X_t\leqslant Z_1 - \frac{C}{2}t, EX_t > -\infty$，所以 $Et<\infty$。

任意给定 $\beta'>\beta$。令 $s_n = \sum_1^n[(y_k-\beta')^+ - C]$，则

$$X_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n}(y_k - \beta' + \beta') - nC \leqslant \beta' + s_n.$$

于是 $X_t \leqslant \beta' + s_t$。根据著名的 Wald 引理(参看第二章 § 2)

$$Es_t = (Et)\cdot E((y_1-\beta')^+ - C).$$

但是 $E(y_1-\beta')^+<C$，故 $Es_t<0$，从而 $EX_t<\beta'$。由 β' 的任意性知 $EX_t\leqslant\beta=EX_s$。这表明 s 是最优停时。

可以证明，当条件 $E(y_1^+)^2<\infty$ 改为 $E|y_1|<\infty$ 时，s 仍是最优停时。

§8 马尔可夫情形下的最优停止

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间，$\{\mathscr{F}_n\}$是上升的 σ 代数列，$\mathscr{F}_n\subset\mathscr{F}$ $(n\geqslant0)$，$(Z,\mathscr{B})$是可测空间，$\mathscr{B}$包含全体单点集。

定义8.1 称$(z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant0)$是$(Z,\mathscr{B})$（相空间）中的转移函数是 $P(x,B)$的（齐次）马氏链，若对任何 $n\geqslant0,B\in\mathscr{B}$，

$$P(z_{n+1}\in B\,|\,\mathscr{F}_n)=P(z_n,B)\quad(\text{a.s.}).$$

注意，转移函数 $P(x,B)$的定义是：对任何 $x\in Z,P(x,\cdot)$是$\mathscr{B}$上的概率测度；对任何 $B\in\mathscr{B},P(\cdot,B)$是$\mathscr{B}$可测函数。

定义8.2 称随机序列$(X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant0)$处于马尔可夫情形，若存在某可测空间$(Z,\mathscr{B})$中的马氏链$(z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant0)$及$(Z,\mathscr{B})$上的可测函数 $g_n(\cdot)$，满足：

$$X_n=g_n(z_n)\quad(n\geqslant0).$$

为了研究$(X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant0)$的最优停时，首先指出，在一定条件下，§4中定义的 γ_n 是 $\sigma(z_n)$可测的。

引理8.1 若对于序列$(X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant0)$条件 L 成立，则 γ_n是$\sigma(z_n)$可测的。

证明 根据引理5.2，不妨假设条件 A^+ 也满足。任取 $a\in(-\infty,0)$，令

$$X_n(a)=X_n\vee a,$$

$$\gamma_n(a)=\text{e.sup}\{E(X_t(a)\,|\,\mathscr{F}_n):\ t\geqslant n,t\text{ 是停时}\}.$$

令

$$\gamma_N^N(a)\triangleq X_N(a),$$

$$\gamma_n^N(a) \triangleq \max(X_n(a), E(\gamma_{n+1}^N(a) | \mathscr{F}_n))$$

其中 $n = N-1, \cdots, 0$。用后退归纳法看出 $\gamma_n^N(a)$ 是 $\sigma(z_n)$ 可测的 $(0 \leqslant n \leqslant N)$。从引理 6.2 知 $\gamma_n(a) = \lim\limits_N \gamma_n^N(a)$ 是 $\sigma(z_n)$ 可测的。记 $\hat{\gamma}_n = \lim\limits_{a \to -\infty} \gamma_n(a)$，它是 $\sigma(z_n)$ 可测的，且

$$\hat{\gamma}_n = \max(X_n, E(\hat{\gamma}_{n+1} | \mathscr{F}_n)).$$

下面证明 $\hat{\gamma}_n = \gamma_n$ (a.s.)。

因为 $\gamma_n(a) \geqslant \gamma_n$，故 $\hat{\gamma}_n \geqslant \gamma_n$。以下只须证 $E\hat{\gamma}_n = E\gamma_n$。任意给定 $\varepsilon > 0$，令

$$t = \inf\{k: k \geqslant n, X_k \geqslant \hat{\gamma}_k - \varepsilon\}.$$

易知

$$\begin{aligned} E\hat{\gamma}_n &= \int_{\{t=n\}} \hat{\gamma}_n \mathrm{d}P + \int_{\{t>n\}} \hat{\gamma}_{n+1} \mathrm{d}P \\ &= \int_{\{t=n\}} \hat{\gamma}_n \mathrm{d}P + \int_{\{t=n+1\}} \hat{\gamma}_{n+1} + \int_{\{t>n+1\}} \hat{\gamma}_{n+1} \mathrm{d}P = \cdots \\ &= \int_{\{n \leqslant t \leqslant N\}} \hat{\gamma}_t \mathrm{d}P + \int_{\{t>N\}} \hat{\gamma}_N \mathrm{d}P. \end{aligned}$$

因 I

$$\hat{\gamma}_N \leqslant E(\sup_{n \geqslant 0} X_n^+ | \mathscr{F}_N),$$

$$\int_{\{t<\infty\}} (\hat{\gamma}_t)^+ \mathrm{d}P \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{t=n\}} (\sup_{k \geqslant 0} X_k^+) \mathrm{d}P = \int_{\{t<\infty\}} \sup_{k \geqslant 0} X_k^+ \mathrm{d}P < \infty,$$

利用 Fatou 引理知

$$\begin{aligned} E\hat{\gamma}_n &\leqslant \int_{\{t<\infty\}} \hat{\gamma}_t \mathrm{d}P + \int_{\{t=\infty\}} \hat{\gamma}_\infty \mathrm{d}P \\ &\leqslant \int_{\{t<\infty\}} X_t \mathrm{d}P + \int_{\{t=\infty\}} \hat{\gamma}_\infty \mathrm{d}P + \varepsilon, \end{aligned}$$

但是

$$\hat{\gamma}_n \leqslant \gamma_n(a),$$

$$\hat{\gamma}_\infty \leqslant \gamma_\infty(a) = X_\infty(a),$$

$$\lim_{a \to -\infty} X_\infty(a) = X_\infty,$$

故 $\hat{\gamma}_n \leqslant X_t$，于是

$$E\hat{\gamma}_n \leqslant EX_t + \varepsilon \leqslant E\gamma_n + \varepsilon.$$

由于 ε 的任意性，$E\hat{\gamma}_n \leqslant E\gamma_n$。既然

$$\hat{\gamma}_n \geqslant \gamma_n, \quad E\hat{\gamma}_n < \infty, \quad E\gamma_n \geqslant EX_n > -\infty.$$

故 $\hat{\gamma}_n = \gamma_n$(a.s.)。这表明 γ_n 是 $\sigma(z_n)$可测的①。证毕。

系8.1 设条件 L 及 A^+ 成立，

$$V_n(a) \triangleq \sup\{EX_t(a), \ t \text{ 是停时}, \ t \geqslant n\},$$

则 $\lim\limits_{a \to -\infty} V_n(a) = V_n$。

证明 因为 $\gamma_n(0) \leqslant E(\sup\limits_{k \geqslant 0} X_k^+ | \mathscr{F}_n)$，利用单调收敛定理知

$$V_n(a) = E\gamma_n(a) \to E\gamma_n = V_n \quad (a \to -\infty).$$

证毕。

从引理8.1知有 $\mathscr{B}$ 可测函数 $\varphi_n(z)$ 满足：

$\gamma_n = \varphi_n(z_n)$。记

$$B_n = \{z: \ \varphi_n(z) = g_n(z)\}.$$

则

$$\sigma \triangleq \inf\{n: \ n \geqslant 0, \ \gamma_n = X_n\} = \inf\{n: \ n \geqslant 0, \ z_n \in B_n\}.$$

由此可见，在条件 L 及 A^+ 下，$V = EX_\sigma = Eg_\sigma(z_\sigma)$ 只与 $z_0, z_1, \cdots$ 之概率分布及函数列 $g_0, g_1, \cdots$ 有关，而与 $\{\mathscr{F}_n\}$ 无直接依赖关系。

以下设 $g_n(z)$ 有下列特殊的形式：

$$g_n(z) = \alpha^n g(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k C, \tag{8.1}$$

这里 g 是 $\mathscr{B}$ 可测函数，$g > -\infty$，$0 < \alpha \leqslant 1$，$0 \leqslant C < \infty$。(8.1) 式又有两种特别重要的情况：

$$g_n(z) = g(z) - nC \ （费用模型），$$

$$g_n(z) = \alpha^n g(z) \ （折扣模型）。$$

我们指出，在 $g_n(z)$ 是(8.1)型的情况下，最优停止问题可

---

① 更确切地说，在 γ_n 的定义里允许在零概率集上适当改变 γ_n 的值，既然 $\gamma_n = \hat{\gamma}_n$(a.s.)，我们可以用 $\hat{\gamma}_n$ 作为 γ_n 的值，从而 γ_n 是 $\sigma(z_n)$ 可测的。

用盈函数方法(参见 ШИРЯЕВ (1976))得到满意的处理。

记

$$\mathscr{D}=\Big\{f:\ f\text{ 是}(Z,\mathscr{B})\text{上的可测函数，}f>-\infty\text{且}$$
$$\int_Z P(x,\mathrm{d}y)f^-(y)<\infty\Big\}.$$

定义算子 T 如下：

$$Tf(z)=\int_Z P(z,\mathrm{d}y)f(y)\quad(f\in\mathscr{D}).$$

当 $f\in\mathscr{D}$ 时，令

$$Q_{\alpha C}f(z)=\max(f(z),\ \alpha Tf(z)-C),$$
$$Q^n_{\alpha C}f=Q_{\alpha C}(Q^{n-1}_{\alpha C}f)\quad(n\geqslant 2),$$
$$Q^1_{\alpha C}f=Q_{\alpha C}f,\qquad Q^0_{\alpha C}f=f,$$

注意 $Q^n_{\alpha C}f(z)$ 对 n 不减，记 $V_g(z)=\lim\limits_n Q^n_{\alpha C}g(z)$。

定理8.1 对一切 $g\in\mathscr{D}$，有

$$V_g(z)=\max(g(z),\ \alpha TV_g(z)-C). \tag{8.2}$$

证明 对任何 $g\in\mathscr{D}$，用归纳法可以证明

$$Q^n_{\alpha C}g(z)=\max(g(z),\ \alpha TQ^{n-1}_{\alpha C}g(z)-C)\quad(n\geqslant 1).$$

利用单调收敛定理即得(8.2)。证毕。

定义8.3 设 $f\in\mathscr{D}$，称 f 是(α,C)盈函数，若

$$\alpha Tf(z)-C\leqslant f(z)\quad(\text{一切 }z\in\boldsymbol{Z}).$$

定义8.4 称 $h(z)$是 $g(z)$之(α,C)盈强函数，若 $h(z)\geqslant g(z)$ 且 $h(z)$是(α,C)盈函数。

系8.2 $V_g(z)$是 $g(z)$之最小(α,C)盈强函数。

证明 从(8.2)看出，$V_g(z)$是g之(α,C)盈强函数。若f是$g(z)$之任一(α,C)盈强函数，则$Q_{\alpha C}f=f\geqslant g$，于是 $f=Q^n_{\alpha C}f\geqslant Q^n_{\alpha C}g$，故

$$f\geqslant\lim_n Q^n_{\alpha C}g=V_g.$$

这就证明了 $V_g(z)$是 g 之最小(α,C)盈强函数。证毕。

定理 8.1 的意义在于，为了求出 $V_g(z)$，只须解方程

$$u(z)=\max(g(z),\ \alpha Tu(z)-C).$$

若这个方程的解唯一，则 $V_g(z)$就求出了。下文将会看到，一旦求出了 $V_g(z)$，则 γ_n 就找出了，从而最优停时 σ 就得到明显的表达式。

以下把 $V_g(z)$简写为 $V(z)$。

引理8.2 设序列$(X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant0)$满足条件 L，$g\in\mathscr{D}$，则对一切 $n\leqslant N<\infty$，有

$$\gamma_n^N=\alpha^n Q_{\alpha C}^{N-n}g(z_n)-\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k C\quad(\text{a.s.}),\qquad(8.3)$$

这里规定 $\sum_{k=0}^{-1}=0$。

证明 对 n 作归纳法。易知

$$\gamma_N^N=X_N=\alpha^N g(z_N)-\sum_{k=0}^{N-1}\alpha^k C=\alpha^N Q_{\alpha C}^{N-N}g(z_N)-\sum_{k=0}^{N-1}\alpha^k C.$$

可见 $n=N$ 时，(8.3)成立。设对于 $0<n\leqslant N$，(8.3)成立，则

$$\begin{aligned}\gamma_{n-1}^N&=\max(X_{n-1},\ E(\gamma_n^N|\mathscr{F}_{n-1}))\\&=\max\left(X_{n-1},\ \alpha^n\int_Z Q_{\alpha C}^{N-n}g(y)P(z_{n-1},\mathrm{d}y)-\sum_{s=0}^{n-1}\alpha^s C\right)\\&=\max\left(\alpha^{n-1}g(z_{n-1}),\ \alpha^{n-1}\cdot\alpha TQ_{\alpha C}^{N-n}g(z_{n-1})\right)-\sum_{s=0}^{n-1}\alpha^s C\\&=\alpha^{n-1}Q_{\alpha C}^{N-(n-1)}g(z_{n-1})-\sum_{s=0}^{n-2}\alpha^s C,\end{aligned}$$

可见(8.3)中用 $n-1$ 代替 n 后仍成立。这就证明了(8.3)对一切 $n\leqslant N$ 均成立。证毕。

以下分别对 $\alpha<1$ 与 $\alpha=1$ 的情形进行讨论。

引理8.3 设 $0<\alpha<1$，$g\in\mathscr{D}$，$E(\sup\limits_{n\geqslant0}\alpha^n g^-(z_n))<\infty$，则对一切 $n\geqslant0$，有

$$\gamma_n = \alpha^n V(z_n) - \sum_{s=0}^{n-1} \alpha^s C. \tag{8.4}$$

证明 因为

$$X_n = \alpha^n g(z_n) - \sum_{s=0}^{n-1} \alpha^s C,$$

$$X_n^- \leqslant \alpha^n g^-(z_n) + \frac{C}{1-\alpha},$$

故条件 A^- 满足。从引理 6.2 知 $\gamma_n = \lim_N \gamma_n^N$，再利用引理 8.2 即知(8.4)成立。证毕。

定理8.2 设 $0<\alpha<1$，$g\in\mathscr{D}$，$E(\sup_{n\geq 0}\alpha^n g^-(z_n))<\infty$，而且 $E(\sup_{n\geq 0} X_n)<\infty$，则

$$\sigma = \inf\{n;\ n\geqslant 0,\ V(z_n) = g(z_n)\} \tag{8.5}$$

是最优停时，而且最优停时唯一的充要条件是：对一切 $n\geqslant 0$，

$$P(\sigma = n, z_n \in B) = 0, \tag{8.6}$$

其中 $B = \{z;\ g(z) = \alpha TV(z) - C\}$。

证明 因为条件 A^+ 满足，故

$$\sigma = \inf\{n;\ n\geqslant 0,\ \gamma_n = X_n\}$$

是最优停时，利用(8.4)知道(8.5)成立。从§5知最优停时唯一的充要条件是

$$P(\sigma = n,\ X_n = E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)) = 0. \tag{8.7}$$

但是

$$\begin{aligned}
E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n) &= E\left(\alpha^{n+1}V(z_{n+1}) - \sum_{s=0}^{n}\alpha^s C \,\Big|\, \mathscr{F}_n\right) \\
&= \alpha^{n+1}\int_Z V(y)P(z_n, \mathrm{d}y) - \sum_{s=0}^{n}\alpha^s C \\
&= \alpha^{n+1}TV(z_n) - \sum_{s=0}^{n}\alpha^s C,
\end{aligned}$$

而 $X_n = \alpha^n g(z_n) - \sum_{s=0}^{n-1}\alpha^s C$，故条件(8.6)与(8.7)等价。证毕。

现在来研究 $\alpha=1$ 的情形，此时

$$X_n = g(z_n) - nC.$$

定理8.3 设 $E(\sup_{n\geq 0} g^-(z_n))<\infty$，存在 $C'<C$ 使得

$$E(\sup_{n\geq 0}(g(z_n) - nC'))<\infty,$$

则

$$\sigma = \inf\{n: n\geq 0, V(z_n) = g(z_n)\}$$

是最优停时，$E\sigma<\infty$，而且最优停时唯一的充要条件是：对一切 $n\geq 0$，

$$P(\sigma = n, z_n\in B) = 0, \tag{8.8}$$

其中 $B = \{z: g(z) = TV(z) - C\}$。

证明 易知$(X_n, \mathscr{F}_n, n\geq 0)$满足条件 A^+，故

$$\sigma = \inf\{n: n\geq 0, \gamma_n = X_n\}$$

是最优停时。我们指出，(8.4)当 $\alpha=1$ 时也成立。实际上，任意给定 $n\geq 0$，记

$$\sigma_n = \inf\{k: k\geq n, \gamma_k = X_k\},$$

从定理 4.2 知 $E(X_{\sigma_n}|\mathscr{F}_n) = \gamma_n$ (a.s.)。故

$$EX_{\sigma_n} = E\gamma_n \geq -EX_n^- > -\infty.$$

但是

$$\begin{aligned} X_{\sigma_n} &= g(z_{\sigma_n}) - \sigma_n C \\ &= g(z_{\sigma_n}) - \sigma_n C' - \sigma_n(C - C') \\ &\leq \sup_{k\geq 0}(g(z_k) - kC') - \sigma_n(C - C'), \end{aligned}$$

故 $E\sigma_n<\infty$。易知

$$\gamma_n^N \geq E(X_{\sigma_n\wedge N}|\mathscr{F}_n) = E(g(z_{\sigma_n\wedge N})|\mathscr{F}_n) - E((\sigma_n\wedge N)C|\mathscr{F}_n).$$

但是 $g(z_{\sigma_n\wedge N})\geq -\sup_{k\geq 0} g^-(z_k)$，由 Fatou 引理知

$$\lim_N \gamma_n^N \geq E(g(z_{\sigma_n})|\mathscr{F}_n) - E(\sigma C_n|\mathscr{F}_n) = E(X_{\sigma_n}|\mathscr{F}_n).$$

所以

$$\lim_N \gamma_n^N \geq \gamma_n \quad \text{(a.s.)}.$$

另一方面 $\gamma_n^N\leq\gamma_n$，故

$$\gamma_n = V(z_n) - nC \quad (a.s.).$$

于是最优停时

$$\sigma = \inf\{n: V(z_n) = g(z_n)\}, \qquad E\sigma = E\sigma_0 < \infty.$$

和定理 8.2 的证法一样，可知(8.8)是最优停时唯一的充要条件．证毕。

从(8.6)和(8.8)直接得到下列结论：

系8.2 在定理 8.2 $(0<\alpha<1)$或定理 8.3$(\alpha=1)$的假设下，如果方程

$$g(z) = \alpha TV(z) - C$$

在$\boldsymbol{Z}$中没有根，则 σ 是唯一的最优停时。

我们还要讲一个定理，它是用来刻画最优停时的特征的。仍设 $X_n = g_n(z_n)$，其中

$$g_n(z) = \alpha^n g(z) - \sum_{s=0}^{n-1} \alpha^s C, \qquad 0<\alpha\leqslant 1,\ C\geqslant 0,$$

$g(z)$有界，$(z_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0)$是相空间$(Z, \mathscr{B})$中的时齐马氏链，转移函数是$P(x,B)$。我们定义函数$V_0(z)$和$V_1(z)$如下：任意给定 $z\in Z$，设$(\xi_n^z, \mathscr{F}_n^z, n\geqslant 0)$是概率空间$(\Omega^z, \mathscr{F}^z, P^z)$上的时齐马氏链，转移函数是前面提到的 $P(x,B)$，但满足 $P^z(\xi_0^z = z) = 1$。换句话说，$(z_n^z, \mathscr{F}_n^z, n\geqslant 0)$是从 z 出发的马氏链(注意，Ω^z 与Ω可能不同，因为可能出现 $P(z_0 = z) = 0$ 的情形)。令

$$V_0(z) = \sup\{E^z[g_\tau(\xi_\tau^z)]:\ \tau \text{ 是}\{\mathscr{F}_n^z\}\text{停时}\}.$$

$$V_1(z) = \sup\{E^z[g_\tau(z_\tau^z)]:\ \tau \text{ 是}\{\mathscr{F}_n^z\}\text{停时且 } \tau\geqslant 1\},$$

这里 E^z 表示与 P^z 相应的数学期望。要注意的是，$V_0(z)$和$V_1(z)$只依赖于 z 及转移函数 $P(x,B)$。

引理8.4 $V_0(z) = V_g(z)$，$V_1(z) = \alpha TV_g(z) - C$，这里 $V_g(z)$及算子T是以前定义过的，

$$V_g(z) = \lim_n Q_{\alpha C}^n g(z), \qquad Tf(z) = \int_Z P(z, dy) f(y).$$

证明 既然$(\xi_n^z, \mathscr{F}_n^z, n\geqslant 0)$是$(\Omega^z, \mathscr{F}^z, P^z)$上的时齐马氏链，转移函数是$P(x,B)$，利用引理 8.3 的结论及定理 8.3 的证明过程知

$$\gamma_n^z = \alpha^n V_g(\xi_n^z) - \sum_{s=0}^{n-1} \alpha^s C,$$

这里$(\gamma_n^z, \mathscr{F}_n^z, n\geqslant 0)$是序列$(g_n(\xi_n^z), \mathscr{F}_n^z, n\geqslant 0)$的 Snell 包。易知

$$V_0(z) = \int_{\Omega^z} \gamma_0^z \mathrm{d}P^z = \int_{\Omega^z} V_g(\xi_0^z) \mathrm{d}P^z = V_g(z),$$

$$\begin{aligned} V_1(z) &= \int_{\Omega^z} \gamma_1^z \mathrm{d}P^z = \int_{\Omega^z} [\alpha V_g(\xi_1^z) - C] \mathrm{d}P^z \\ &= \alpha T V_g(z) - C. \end{aligned}$$

证毕。

从引理 8.4 顺便看出，$V_0(z)$和$V_1(z)$都是$\mathscr{B}$可测的。

定理8.4 设$g(z)$有界，则有下列结论：

(1) 为了停时τ是$(X_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0)$的最优停时，必须且只须满足：对一切$n\geqslant 0$，

$$V_0(z_n) = \begin{cases} g(z_n), & \text{当 } \tau = n \text{ 时}, \\ V_1(z_n), & \text{当 } \tau > n \text{ 时}. \end{cases}$$

(2) 最优停时唯一的充要条件是：

$$P(\sigma = n, V_1(z_n) = g(z_n)) = 0 \quad (n = 0, 1, \cdots),$$

这里

$$\sigma = \inf\{n: V_0(z_n) = g(z_n)\}.$$

证明 因为

$$\gamma_n = \alpha^n V_0(z_n) - \sum_{s=0}^{n-1} \alpha^s C \quad (\text{因为 } V_0(z) = V_g(z)),$$

$$X_n = \alpha^n g(z_n) - \sum_{s=0}^{n-1} \alpha^s C,$$

$$E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)=E\left(\alpha^{n+1}V_0(z_{n+1})-\sum_0^n\alpha^sC\,|\,\mathscr{F}_n\right)$$
$$=\alpha^{n+1}TV_0(z_n)-\sum_0^n\alpha^sC$$
$$=\alpha^n(\alpha TV_0(z_n)-C)-\sum_0^{n-1}\alpha^sC$$
$$=\alpha^nV_1(z_n)-\sum_0^{n-1}\alpha^sC.$$

从定理 5.2 和定理 5.5 直接推出本定理的结论成立。证毕。

作为本节理论的应用，我们在下节里要研究一类经济系统的最优停止问题。

§9 一类经济系统的最优停止

本节要研究一类经济系统，它可归结为上述马尔可夫情形。

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间，$Z_1,\varepsilon_1,Z_2,\varepsilon_2,\cdots$ 是相互独立的随机变量列，诸 Z_i 服从相同的分布，分布函数是 $F(z)$，诸 ε_i 服从同一个贝努利分布，

$$P(\varepsilon_i=1)=p=1-P(\varepsilon_i=0)\quad(i\geqslant1),$$

这里 $0<p<1$。我们假设 p 已知。设

$$T_0\equiv z\ (\ z\text{ 是常数}),$$
$$T_n=\varepsilon_n(T_{n-1}+Z_n)\quad(n\geqslant1),$$
$$X_n=T_n-nC\quad(n\geqslant0),$$

这里 C 是正数。

$$\mathscr{F}_n=\sigma(Z_1,\varepsilon_1,Z_2,\varepsilon_2,\cdots Z_n,\varepsilon_n)\quad(n\geqslant1),$$
$$\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}.$$

我们来研究序列$(X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant0)$的最优停止问题。

这个问题有明确的经济背景。$(X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant0)$是用来刻画一

类经济系统的模型。Z_i 表示系统在第 i 个周期的"收入"，"$\varepsilon_i=1$"表示第 i 个周期胜利通过，"$\varepsilon_i=0$"表示第 i 个周期失败，只要是胜利通过，收入可以积累，一遇失败则积累的收入就化为零。C 是每个周期应付的"费用"。"$T_0=z$"表示系统开始时的资金是 z。X_n 表示第 n 个周期末系统的"纯收入"。问题是：如何选择明智的停止时刻，使得纯收入的平均值达到最大。这个问题是 T.S.Ferguson (1976)研究过的，下面的论述方法与他的完全不同。

引理9.1 $(T_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$是一维空间$(\boldsymbol{R},\mathscr{B})$中的齐次马氏链，其转移函数是

$$P(x,B)=p\int_{-\infty}^{\infty}I_B(x+u)\mathrm{d}F(u)+(1-p)I_B(0), \qquad (9.1)$$

这里 $\boldsymbol{R}=(-\infty,\infty)$，$\mathscr{B}$是 $\boldsymbol{R}$ 中 Borel 集的全体，I_B 是B的示性函数。

证明 设 f 是任何非负的Borel可测函数，由于 $\sigma(\varepsilon_{n+1},Z_{n+1})$与 $\mathscr{F}_n$ 独立，易知

$$\begin{aligned}E(f(T_{n+1})|\mathscr{F}_n)&=E(f(\varepsilon_{n+1}(T_n+Z_{n+1})]|\mathscr{F}_n)\\&=E\{f[\varepsilon_{n+1}(x+Z_{n+1})]\}|_{x=T_n}\\&=E\{I_{\{\varepsilon_{n+1}=1\}}f(x+Z_{n+1})\}|_{x=T_n}\\&\quad+E\{I_{\{\varepsilon_{n+1}=0\}}f(0)\},\end{aligned}$$

于是得

$$E(f(T_{n+1}|\mathscr{F}_n)=p\int_{-\infty}^{\infty}f(T_n+u)\mathrm{d}F(u)+(1-p)f(0).$$

此式两边对 $\sigma(T_n)$取条件期望得到

$$\begin{aligned}E(f(T_{n+1})|\mathscr{F}_n)&=E(f(T_{n+1})|T_n)\\&=p\int_{-\infty}^{\infty}f(T_n+u)\mathrm{d}F(u)+(1-p)f(0)\ \text{(a.s.)},\end{aligned}$$

取 $f=I_B$，知$(T_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$是齐次马氏链，而且它的转移函数有表达式(9.1)。证毕。

引理9.2 设 $E(Z_1^+)^2<\infty$，则 $E(\sup\limits_{n\geqslant 0}X_n)<\infty$。

证明 令 $\tau_0\equiv 0$，

$$\tau_i\triangleq\inf\{n:\ n>\tau_{i-1},\ \varepsilon_n=0\}\quad(i\geqslant 1).$$

任意给定 ω 及 $n\geqslant 1$，有 $l=l(n,\omega)$满足

$$\tau_{l-1}(\omega)<n\leqslant\tau_l(\omega).$$

于是

$$T_n\leqslant z+\sum_{k=\tau_{l-1}+1}^{\tau_l}Z_k^+.$$

令

$$y_i=\sum_{k=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i}Z_k^+\quad(i\geqslant 1),$$

$$\xi_n=\max(y_1,\cdots,y_n)-nC,$$

则

$$\sup_{n\geqslant 0}X_n\leqslant z+\sup_{n\geqslant 0}\xi_n.$$

易知 $y_1,y_2,\cdots$是相互独立同分布的随机变量列，

$$E\tau_1^2=\sum_{k=1}^{\infty}k^2P(\tau_1=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2p^{k-1}(1-p)<\infty,$$

$$Ey_1^2=E\left(\sum_1^{\tau_1}Z_i^+\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\{\tau_1=n\}}\left(\sum_1^nZ_i^+\right)^2\mathrm{d}P$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}P(\tau_1=n)\cdot E\left(\sum_1^nZ_i^+\right)^2$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P(\tau_1=n)\cdot n^2E(Z_1^+)^2=(E\tau_1^2)E(Z_1^+)^2<\infty.$$

从例7.2中的讨论知 $E(\sup\limits_{n\geqslant 0}\xi_n)<\infty$，所以 $E(\sup\limits_{n\geqslant 0}X_n)<\infty$。证毕。

令

$$g(x)\equiv x,\qquad Qg(x)=\max(g(x),\quad Tg(x)-C),$$

这里 $Th(x)=\int_{-\infty}^{\infty}P(x,\mathrm{d}y)h(y)$，$P(x,B)$ 的定义见(9.1)式。令 $V(x)=\lim\limits_{n}Q^n g(x)$。从定理 8.1 知

$$V(x)=\max\left(x,p\int_{0}^{\infty}V(x+u)\mathrm{d}F(u)+(1-p)V(0)-C\right).\tag{9.2}$$

为了找出最优停时的具体表达式，研究 $V(x)$。

引理9.3 设 $P(Z_1\geqslant 0)=1$，$EZ_1^2<\infty$，则

$$\{x:\ V(x)=x\}=[s,\infty),\tag{9.3}$$

其中

$$s=V(0)+(1-p)^{-1}(pEZ_1-C).$$

证明 因为 $g(x)\equiv x$ 时，

$$Tg(x)=p\int_0^{\infty}(x+u)\mathrm{d}F(u)=px+pEZ_1,$$

故

$$Qg(x)=\max(x,px+pEZ_1-C).$$

令

$$u_n=Q^{n-1}g(0)+(1-p)^{-1}(pEZ_1-C).$$

利用归纳法不难证明，对一切 $n\geqslant 2$，有

$$Q^n g(x)=\begin{cases}\max(x,px+pEZ_1\\ \qquad -C+(1-p)Q^{n-1}g(0)), & \text{当 } x\geqslant u_{n-1},\\ x, & \text{当 } x\geqslant u_n.\end{cases}$$

显然

$$u_n\nearrow V(0)+(1-p)^{-1}(pEZ_1-C)=s\quad(n\to\infty).$$

当 $x\geqslant s$ 时，$Q^n g(x)=x$，故

$$V(x)=\lim_{n}Q^n g(x)=x;$$

当 $x<s$ 时，有 n_0 使得 $x\in[u_{n_0-1},u_{n_0})$（$u_0\triangleq-\infty$）。于是

$$Q^{n_0}g(x) = px + pEZ_1 - C + (1-p)Q^{n_0-1}g(0)$$
$$= px + (1-p)u_{n_0} > px + (1-p)x = x,$$

可见

$$\{x:\ V(x) = x\} = [s, \infty).$$

证毕.

令

$$b = (1-p)^{-1}(pEZ_1 - C),$$
$$h(x) = V(-x+s) - V(0) + x - b,$$

这里 $s = V(0) + b$. 从(9.2)和引理 9.3 知

$$h(x) = \begin{cases} p\int_0^x h(x-u)\mathrm{d}F(u) + (1-p)x, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases} \tag{9.4}$$

显然 $h(s) = s - b$.

从定理 8.3 和引理 9.3 直接得到下列结论:

定理9.1 设

$$P(Z_1 \geqslant 0) = 1, \quad EZ_1^2 < \infty,$$

则$(X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0)$的最优停时

$$\sigma = \inf\{n:\ n \geqslant 0,\ T_n \geqslant s\}, \tag{9.5}$$

其中 $s = V(0) + (1-p)^{-1}(pEZ_1 - C)$适合方程

$$h(s) = s - b, \tag{9.6}$$

这里 $h(x)$适合积分方程(9.4), $b = (1-p)^{-1}(pEZ_1 - C)$.

定理 9.1 的意义在于, 为了给出最优停时, 只须求出 s. 为了找 s, 先解积分方程(9.4). 不难看出, 这个积分方程的连续解(甚至局部有界解)只有一个. 找出了解 $h(x)$后, 再解方程 $h(x) = x - b$, 在一般情况下(当 $P(Z_1 = 0) < 1$), 这个方程只有一个根, 这根就是 s.

我们还要指出, 在定理 9.1 的条件下,如果再假设 $P(Z_1 = 0) < 1$, 则可以证明 $V(x)$是严格增加的连续函数, 方程(9.6) $h(x) = x - b$ 的根只有一个; 方程 $x = TV(x) - C$ 恰有一个根S,

从而停时(9.5)是唯一的最优停时的充要条件是：对一切$n\geqslant 0$，

$$P(\sigma = n, T_n = S) = 0.$$

特别，由此知道，如果 Z_1 是正值连续随机变量，初值 $T_0 = z \neq S$，则停时(9.5)是唯一的最优停时。这些结论的推导并不复杂，从略。

从引理 9.3 的证明过程知道，如果 $pEZ_1 \leqslant C$，则

$$Q^n g(0) = 0 \quad (n \geqslant 2).$$

于是
$$V(0) = \lim_n Q^n g(0) = 0,$$
从而有
$$S = (1-p)^{-1}(pEZ_1 - C). \tag{9.7}$$

以后只须研究 $pEZ_1 > C$ 的情形。

注意，方程(9.4)是 Wiener-Hopf 型积分方程，在某些情况下有办法求解。

设 Z_1 只取非负整数值，

$$p_j = P(Z_1 = j)\,(j \geqslant 0), \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1.$$

为了计算 S，我们对任何 $u \in [0,1)$ 计算$h(i+u)\,(i = 0,1,2,\cdots)$。从(9.4)知

$$h(i+u) = \frac{1}{1 - pp_0}\left\{\sum_{j=1}^{i} pp_j h(i+u-j) + (1-p)(i+u)\right\},$$

$$i = 1,2,\cdots,$$

$$h(u) = \frac{1}{1 - pp_0}(1-p)u.$$

这是计算 $h(i+u)$的递推公式。令

$$\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j, \qquad \varphi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i+u) z^i.$$

从上述递推公式知

$$\varphi(z)=\frac{(1-p)[u+(1-u)z]}{[1-p\psi(z)](1-z)^2}. \tag{9.8}$$

如果能够将 $\varphi(z)$ 展成 z 的幂级数，则 $h(i+u)$ 就可求出。

例9.1 Z_1 服从几何分布，此时

$$p_0=0,\quad p_j=a^{j-1}b\ (j=1,2,\cdots),$$

$$0<a<1,\quad b=1-a.$$

此时

$$\psi(z)=\sum_{j=0}^{\infty}p_jz^j=\frac{bz}{1-az}.$$

从(9.8)知

$$\varphi(z)=\frac{(1-p)(1-az)[u+(1-u)z]}{[1-(a+pb)z](1-z)^2}.$$

将 $\varphi(z)$ 展开成 z 的幂级数后可得：

$$h(i+u)=\left(\frac{p}{b(1-p)}-pu\right)(a+pb)^i+i+u-\frac{p}{b(1-p)}.$$

令 $i=[x]$ $(x\geqslant 0)$，$u=x-[x]$，即得

$$h(x)=\left(\frac{p}{b(1-p)}-p(x-[x])\right)(a+pb)^{[x]}+x-\frac{p}{b(1-p)}.$$

利用(9.6)可求出

$$s=[s]+\frac{1}{b(1-p)}-\frac{C}{p(1-p)}(a+pb)^{-[s]},$$

其中 $[s]=\left[\dfrac{\ln(p/bC)}{-\ln(a+pb)}\right]$。

以上假定了 $pEZ_1>C$，即 $p>bC$。当 $p\leqslant bC$ 时，根据以前的讨论知 $s=(1-p)^{-1}(pEZ_1-C)$ （见(9.7)）。

我们指出，当 Z_1 是某些连续型随机变量时(例如 Z_1 服从指数分布)，可用 Wiener-Hopf 技巧解方程(9.4)，再用(9.6)式来

确定 s。详细讨论可参看陈家鼎和李向科(1986)。

§10 补充与习题

(1) 设$(X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$是随机序列,停时$\tau_1,\tau_2$满足：$\tau_1\geqslant n$，$\tau_2\geqslant n$，$EX_{\tau_2}$存在，$EX_{\tau_1}>-\infty$，令

$$A=\{E(X_{\tau_2}|\mathscr{F}_n)\geqslant E(X_{\tau_1}|\mathscr{F}_n)\},$$

$$\tau=\tau_2\cdot I_A+\tau_1 I_{A^c},$$

则可以证明τ是停时，$EX_\tau>-\infty$而且对$i=1,2$均有

$$E(X_\tau|\mathscr{F}_n)\geqslant E(X_{\tau_i}|\mathscr{F}_n)\quad(\text{a.s.}).$$

(2) 设$(X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$是随机序列,

$$V_n\triangleq\sup\{EX_\tau:\ \tau\text{ 是停时},\ \tau\geqslant n,\ EX_\tau\text{ 存在}\}(n\geqslant 0).$$

试证明：如果$V_n>-\infty$ $(n\geqslant 0)$，则

① 存在停时τ_i，$\tau_i\geqslant n$，EX_{τ_i}存在$(i\geqslant 1)$，满足：

$$E(X_{\tau_i}|\mathscr{F}_n)\nearrow\gamma_n\quad(i\to\infty)\quad(\text{a.s.}).$$

② $\gamma_n=\max(X_n,E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n))$ (a.s.)。

提示：利用(1)中的结论。

(3) 设$(X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$是随机序列,

$$\tilde{C}_n=\{\tau:\ \tau\text{ 是有限停时},\ EX_\tau^-<\infty\},$$

$$\tilde{\gamma}_n=\text{e.}\sup\{E(X_\tau|\mathscr{F}_n):\ \tau\in\tilde{C}_n\},$$

$$\tilde{V}_n=\sup\{EX_\tau:\ \tau\in\tilde{C}_n\}.$$

试证明，在条件$V_n>-\infty$ $(n\geqslant 0)$下有

$$V_n=\tilde{V}_n,\qquad\gamma_n=\tilde{\gamma}_n\quad(\text{a.s.}).$$

(4) 设条件A^+成立，t是任一停时，

$$C(t)=\{\tau:\ \tau\text{ 是任一停时},\ \tau\leqslant t\}.$$

则存在停时$\tau^*\in C(t)$满足：

$$EX_{\tau^*}=\sup\{EX_\tau:\ \tau\in C(t)\}.$$

（5）称停时 τ 是宜取的，若对一切 $n\geqslant 0$，$E(X_\tau|\mathscr{F}_n)>X_n$（在 $\{\tau>n\}$ 上 a.s. 成立）。

设条件 L 或 A^+ 成立，对任何停时 τ，令

$$\tau'=\inf\{j:\ E(X_{\tau j}|\mathscr{F}_j)\leqslant X_j\},$$

则 τ' 也是停时，$\tau'\leqslant\tau$ (a.s.)，τ' 是宜取的且 $EX_{\tau'}\geqslant EX_\tau$。

（6）某人参加赌博，开始时赌本是 $a>0$。每局以概率 p 得原先之两倍，以概率 $1-p$ 输掉（即得 0）。我们说，当 $1>p>\frac{1}{2}$ 时，不存在最优停止法则。数学上的描述如下：用 X_n 表示第 n 局后某人手中的钱数，$X_0=a$，对一切 $n\geqslant 0$，

$$P(X_{n+1}=2x_n^0|X_0=a_0,\ X_1=x_1^0,\cdots,X_n=x_n^0)=p,$$

$$P(X_{n+1}=0|X_0=a_0,X_1=x_1^0,\cdots,X_n=x_n^0)=1-p.$$

$$\mathscr{F}_n-\sigma(X_0,X_1,\cdots,X_n)(n\geqslant 0).$$

可以证明，不存在停时 τ 使 EX_τ 达到最大值。

提示：首先证明：对任何停时 τ，$EX_\tau<\infty$，然后证明

$$E(X_{\tau+1}|\mathscr{F}_\tau)=2pX_\tau\ (\text{a.s.}).$$

（7）可以证明，如果条件 A^+ 不成立，则

$$\sigma\triangleq\inf\{n:\ \gamma_n=X_n\}$$

可能不是最优停时。

设 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$，$\mathscr{F}$ 由 Ω 之全部子集组成，这里

$$\omega_j=(0,1,2,\cdots,j-1,0,0,\cdots)\ (j\geqslant 1).$$

$$P(\omega_j)=\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\ (j\geqslant 1),$$

$$P(A)=\sum_{\omega_j\in A}P(\omega_j).$$

$$X_0(\omega_j)=X_1(\omega_j)=-1\ (j\geqslant 1),$$

$$X_n(\omega_j)=\omega_j\text{的第 } n \text{ 个分量}\ (n\geqslant 2).$$

$$\mathscr{F}_n=\sigma(X_0,\cdots,X_n)\ (n\geqslant 0).$$

试证明 σ 不是 $(X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$ 的最优停时。

(8) 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是完全概率空间(即P零测集的子集均属于$\mathscr{F}$)，$\{\mathscr{F}_t, t\in[0,\infty)\}$是$\mathscr{F}$的一族子$\sigma$代数，满足所谓"通常条件"：

① $\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}_t$(一切$s<t$)，

② $\bigcap\limits_{t>s}\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_s$，

③ $\mathscr{F}_0$包含所有的P零测集。

定义 称τ是$\{\mathscr{F}_t\}$的停时，若$0\leqslant\tau\leqslant\infty$且对一切$t\geqslant0$有

$$\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t.$$

设$(x_t,\mathscr{F}_t,t\geqslant0)$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的右连续随机过程($x_t$是$\mathscr{F}_t$可测的)，恒记$x_\infty=\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}x_t$。问：是否有停时$\tau^*$(关于$\{\mathscr{F}_t\}$的停时)满足

$$Ex_{\tau^*}=\sup\{Ex_\tau:\ \tau\text{是}\{\mathscr{F}_t\}\text{的停时且}Ex_\tau\text{存在}\}?$$

这就是随机过程的最优停止问题。赵彭亮(1987)证明了下列结论：

若右连续过程$(x_t,t\geqslant0)$满足下列条件：

1) 对一切$t\geqslant0$，$Ex_t^-<\infty$且

$$E(\sup_{t\geqslant0}x_t^+)<\infty,$$

2) $(x_t,t\geqslant0)$是拟左上半连续的，即对任何停时τ及停时列$\{\tau_n\}$，只要$\tau_n\nearrow\tau(n\to\infty)$就有

$$I_{(\tau<\infty)}\overline{\lim_n}\,x_{\tau_n}\leqslant I_{(\tau<\infty)}x_\tau\quad(\text{a.s.}).$$

则存在最优停时τ^*，即有τ^*满足

$$Ex_{\tau^*}=\sup\{Ex_\tau:\ \tau\text{ 是停时且 }Ex_\tau\text{存在}\}.$$

(9) 设$(x_t,t\geqslant0)$是完全概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上连续的时齐独立增量过程，

$$Ex_1=Ex_0,\ 0<E(x_1-x_0)^2=\sigma^2<\infty.$$

设$\mathscr{F}_t^0=\sigma(x_u,0\leqslant u\leqslant t)$(使诸$x_u(u\leqslant t)$都可测的最小$\sigma$代

数)，$\mathscr{F}_t$是包含$\mathscr{F}_t^0$及所有P零测集的最小σ代数。令

$$z_t = \sin x_t - ct \quad (t \geqslant 0).$$

研究随机过程$(z_t, \mathscr{F}_t, t \geqslant 0)$的最优停止问题。设

$$0 < c < \frac{1}{2}\sigma^2,$$

$$\tau^* = \inf\{t: \sin x_t \geqslant y_0\},$$

其中 $y_0 \in (-1, 1)$是方程

$$\sqrt{1 - y^2} = \frac{2c}{\sigma^2}\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin y\right] \quad (-1 < y < 1)$$

的唯一根。

可以证明τ^*是最优停时，即

$$Ez_{\tau^*} = \sup\{Ez_\tau: \tau\text{是}\{\mathscr{F}_t\}\text{的停时}\}.$$

第二章　序贯假设检验

§1　序贯方法的重要性与两个要素

从本章起我们来讨论序贯统计问题．大家知道，统计学里最基本的概念是总体与样本．总体常用随机变量（或随机向量）来刻画，它的特性是用分布函数来描述；样本则是由总体中抽取的（或观测到的）若干个样品组成，它是由一组随机变量（向量）来刻画．样本中所含的样品个数叫做样本量．统计学的基本任务是通过样本来推测或掌握总体的特性．一个很基本的问题是：样本量要取多大？当然，样本量越大，对总体的了解就越多，因而对总体作出的推断也就越可靠．但是抽样（或进行观测）是需要费用的，抽样量越大，耗费就越大．合理的提法是，在保证所得结论有足够可靠性的前提下，应使得抽样量越小越好．通常的统计方法都是在抽样之前预先给定抽样量的大小．实践表明，这种固定样本量的方法能解决很多问题，但在有些情况下使用这种方法导致不必要的浪费，还存在这样的情况：使用固定样本量方法（无论样本量多大）根本不能解决问题．请看下列例子．

例1.1（单式抽样方案）　设有一批产品（共N件，N很大）须经验收检验，每个产品经过检验可判定为合格还是不合格．最简单的验收方案是选定两个整数n, C，这里$0\leqslant n$（n比N小得多）．从该批产品中随机抽取n件，如果这n件中所含的不合格品件数$d\geqslant C$，则拒收该批产品；若$d<C$，则接受该批产品．很明显，这个验收方案的样本量（抽样量）是固定的整数n．但是在抽样的过程中，如果未抽n件就已抽到了C个不合格品，此时就可以拒收该批产品，而没有必要再往下抽样．换句话说，在有些情况下

事先固定样本量要造成浪费。这就启示我们：应根据抽样过程中出现的情况来决定抽样量。

例1.2 研究一枚不匀称的硬币。我们把有币值的一面叫正面，另一面叫反面。在桌上任意抛掷一次，问：正面朝上的概率是否大于$\frac{1}{2}$？我们可用随机变量X刻画这枚硬币。当正面朝上时$X=1$；反面朝上时$X=0$。记$p=P(X=1)$（这里$P(\cdot)$代表事件的概率）。当然$0<p<1$。上述问题可化为检验如下假设H_1：$0<p<\frac{1}{2}$（对立假设是H_2：$\frac{1}{2}<p<1$）。若拒绝H_1则表明正面朝上的概率大于$\frac{1}{2}$；若接受H_1则表明正面朝上的概率小于$\frac{1}{2}$。在进行检验时每"抽一个样"就是将硬币任意抛掷一次。任意给定小正数α（$0<\alpha<1$，比如$\alpha=0.05$），问：是否有固定样本量的检验法，使得犯两类错误的概率都一致小于α呢？可以严格证明（见本章§9），这个问题的答案是否定的，也就是说，无论预先固定的样本量有多大，也无济于事。

这两个例子是有典型性的，它们表明了固定样本量方法的局限性。第一个例子表明固定样本量方法有时效率不高，第二个例子表明固定样本量方法有时无能无力。统计学发展史上的一个重要里程碑就是序贯方法的出现。人们在四十年代普遍认识到，样本量不必预先固定，可以根据抽样（或观测）过程出现的情况来决定何时停止抽样（或观测），也就是说样本量是一个随机变量。这样得到的样本是一个一个地逐次得到的，叫做序贯样本。可以证明（见本章§9），存在使用序贯样本的检验法检验例1.2中的假设H_1：$0<p<\frac{1}{2}$，其两类错误的概率都小于给定的正数α。

序贯统计（或者说统计中的序贯方法）正是研究如何得到和利用序贯样本进行统计推断（或选择）的统计学分支。在假设检验、参数估计及更一般的统计判决问题中，序贯统计方法一般有两个

组成部分(两个要素)：停止法则与判决法则①．停止法则告诉我们，在对总体进行逐次观测(或抽样)的过程中何时停止下来；判决法则则告诉我们，根据停止时得到的全部数据(序贯样本)对总体应如何作出推断或选择(接受或拒绝一个假设，估计参数等等)。

数学上如何描写停止法则与判决法则呢？停止法则可用停止时间(简称停时，见第一章)来描写。设对总体进行逐次观测得 $X_1, X_2, \cdots$(概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量列)。记 $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$，它是使 $X_1, \cdots, X_n$ 都可测的最小 σ 代数($n \geqslant 1$)。$\mathscr{F}_0 \triangleq \{\varnothing, \Omega\}$。关于 $\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 的停时 τ 就是停止法则。从定义知道，τ 是否等于 n 仅仅依赖于到时刻 n 为止观察到的数据 $X_1, \cdots, X_n$，而与未来的数据 $X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots$ 无关。停时是一种不依赖于将来的随机变量。显然，任何有实用价值的指示我们何时停止抽样(观测)的法则都应具有这种特性。

定义1.1 称停止法则 τ 是封闭的，若它是有限的，即

$$P(\tau < \infty) = 1.$$

我们最关心封闭的停止法则，不过有时不封闭的(有时叫开放的)停止法则也是有实际意义的(参看本章§9)。

显然，若 $\tau(\omega) \equiv n$，则 $\tau(\omega)$ 也是停止法则，故固定样本量情形是属于我们以后讨论的一般理论的特殊场合。

由于我们这里规定 $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$，则对任何停止法则 τ 有：$\{\tau = 0\} = \varnothing$ 或 Ω。换句话说，我们以后碰到的停时或者恒等于0或者总不小于1．$\tau \equiv 0$ 就表明不进行抽样(观测)。

怎样描写判决法则呢？最一般的情形是给定某个非空集合 A

---

① 有些统计问题里(参看第三章§6)不明确提出停止法则，允许抽样(或观测)无限进行下去，而每次(或每步)如何抽样(或观测)却需要根据在此之前得到的全部数据才能确定。这种递推方法也属于序贯统计的范围。我们可以这样设想，虽然递推过程可以无限进行下去，在实际使用时也是递推地进行到一定阶段(例如估计参数时误差足够小)就停止下来，因而还是有一个停止法则在起作用，不过未明显提出罢了。

（通常叫做行动空间），A中的元素叫做“行动”，同时指定A的一些子集组成的σ代数$\mathscr{B}$（当A是有限集或可数集时，通常规定$\mathscr{B}$由A的全体子集组成；当A是可分完全距离空间之Borel集时，$\mathscr{B}$由A之全体Borel子集组成）。

若停止法则是$\tau=\tau(\omega)$，则得到的序贯样本是

$$X^{\tau}=(X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_{\tau(\omega)}(\omega))①.$$

所谓判决法则，乃是取值于行动空间A的映射

$$d=d(X_1(\omega),\cdots,X_{\tau(\omega)}(\omega)).$$

为了便于数学上的严密讨论，我们要求判决法则具有“可测性”，更确切些说，判决法则可定义为可测空间$(\Omega_\tau,\mathscr{F}_\tau)$到$(A,\mathscr{B})$的测映射，这里

$$\Omega_\tau=\{\tau<\infty\},$$

$$\mathscr{F}_\tau=\{E;\ E\subset\Omega_\tau,\ 对一切n\geqslant 0,\ E\cap\{\tau=n\}\in\mathscr{F}_n\},$$

$\mathscr{F}_\tau$是停时τ之前所有可观察到的事件的全体。

停止法则τ与判决法则d合在一起构成序贯方法Δ，记作$\Delta=(\tau,d)$。

在本章里，我们研究假设检验问题，这是一种两判决问题，即行动空间由两个元素组成，$A=\{a_1,a_2\}$。a_1理解为接受假设H_1；a_2理解为接受假设H_2。

§2 序贯概率比检验(SPRT)的定义

最基本的序贯方法是序贯分析奠基人A．Wald于1943—1945年间提出的序贯概率比检验．这是适应第二次世界大战期间美国军火生产中的质量检验工作的需要而创造出来的。

我们的讨论是很一般的．把随机变量X（总体）看成是某概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$到可测空间$(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}})$的可测映射．已知$X$的分布

① 当$\tau(\omega)=0$时，理解X^{τ}为空集ϕ；当$\tau(\omega)=\infty$时，理解X^{τ}为无穷序列$(X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots)$．下同．

密度(关于某σ有限测度μ)是$f_1(x)$或$f_2(x)$，到底是哪一个？不知道。我们来检验假设H_1：f_1是真正的分布密度；对立假设是H_2：f_2是真正的分布密度。

对X进行观测得到$X_1,X_2,\cdots$。我们恒假定它们是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P_i)(i=1,2)$上的相互独立同分布随机变量列，且$X_1$在$P_i$下的分布密度是$f_i(x)(i=1,2)$，即对一切$B\in\mathscr{B}_x$，有

$$P_i(X_1\in B)=\int_B f_i(x)\mu(\mathrm{d}x)\quad(i=1,2).$$

为了检验上面提出的假设H_1，考虑似然比统计量：

$$\lambda_n=\prod_{i=1}^n f_2(X_i)\Big/\prod_{i=1}^n f_1(X_i)\quad(n\geqslant 1),\qquad(2.1)$$

在这里我们采用通常的习惯：随机变量与随机变量的观测值在记号上不加区别，$X_1,X_2,\cdots,X_n$既代表n个随机变量又代表这n个随机变量的观测值(样本值)。凡统计量都是观测值的函数(从而可以计算出来)，即是$X_1,\cdots,X_n$的值的函数。(2.1)中的$X_1,\cdots,X_n$实际是观测值。以下的许多记号都应这样理解。当然，由于是任意的观测值，统计量作为ω的复合函数又可看作随机变量。这些读者在普通统计学里已熟知。

如果得到了n个观测值$X_1,\cdots,X_n$，根据熟知的Neyman-Pearson引理，最好的检验法是似然比检验，即找出临界值C，当$\lambda_n>C$时拒绝H_1，当$\lambda_n\leqslant C$时接受H_1。A. Wald对此方法进行了重大改进。他的基本思想是：当λ_n很大时拒绝H_1，当λ_n很小时接受H_1，当λ_n不太大也不太小时就不忙作结论而再观测(抽样)一次，往下研究λ_{n+1}，直到某一步似然比足够大或足够小为止。确切些说，给定两个常数$A,B(0<A<1<B<\infty)$，Wald提出的检验法的实施步骤是：设X_1是第一次观测得到的值，计算$\lambda_1(X_1)$，如果

$$\lambda_1(X_1)\geqslant B,$$

则停止观测并拒绝假设H_1；如果

$$\lambda_1(X_1)\leqslant A,$$

则停止观测并接受假设 H_1；如果

$$A<\lambda(X_1)<B,$$

则进行第二次观测，得观测值 X_2，利用(2.1)计算λ_2。如果

$$\lambda_2\geqslant B,$$

则停止观测并拒绝 H_1；如果

$$\lambda_2\leqslant A,$$

则停止观测并拒绝 H_1；如果

$$A<\lambda_2<B,$$

则进行第三次观测，得观测值X_3,…。一般地，如果进行了 $n-1$ 个观测不能作出停止观测并拒绝或接受假设 H_1 的 决定，则进行第 n 次观测，得观测值 X_n，并计算 λ_n。如果 $\lambda_n\geqslant B$，则停止观测并拒绝H_1；如果$\lambda_n\leqslant A$，则停止观测并接受 H_1；如果 $A<\lambda_n<B$，则进行第 $n+1$次观测，得观测值X_{n+1},…。

这个检验法叫做序贯概率比检验(SPRT)，简记作$S(A,B)$。它的停止法则是：

$$\tau^*=\inf\{n:\ n\geqslant 1,\ \lambda_n\,\bar{\in}\,(A,B)\} \tag{2.2}$$

(我们恒约定 $\inf\varnothing=\infty$)，其判决法则是：

$$d^*=\begin{cases}\text{拒绝}H_1, & \text{当}\lambda_{\tau^*}\geqslant B,\\ \text{接受}H_1 & \text{当}\lambda_{\tau^*}\leqslant A.\end{cases} \tag{2.3}$$

从 $S(A,B)$的定义看出，最要紧的是找出停止法则的具体表达式。

例2.1 贝努里(Bernoulli)分布情形。

设$X=0$或 1，

$$P(X=1)=p=1-P(X=0),$$

$0<p<1$。X关于计数测度μ的密度是

$$f(x,p)=p^x(1-p)^{1-x},\qquad x=0,1$$

($\mathscr{X}=\{0,1\}$，$\mathscr{B}_{\mathscr{X}}$由$\mathscr{X}$之一切子集组成，$\mu(B)=B$ 中所含元素的

个数）。

检验假设 H_1: $p=p_1$，对立假设是 H_2: $p=p_2$（这里$0<p_1<p_2<1$，p_1,p_2 是已知的）。设 $X_1,X_2,\cdots$是X的独立观测序列。从(2.1)知

$$\lambda_n=\prod_{i=1}^{n} f(X_i,p_2)\Big/\prod_{i=1}^{n} f(X_i,p_1)$$
$$=\frac{p_2^{S_n}(1-p_2)^{n-S_n}}{p_1^{S_n}(1-p_1)^{n-S_n}}$$
$$=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{S_n}\left(\frac{1-p_2}{1-p_1}\right)^{n-S_n},$$

这里 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i\,(n\geqslant 1)$。于是

$$\ln\lambda_n=S_n\ln(p_2/p_1)+(n-S_n)\ln((1-p_2)/(1-p_1))。$$

给定$0<A<1<B<\infty$，令

$$c=-\frac{\ln\dfrac{1-p_2}{1-p_1}}{\ln\dfrac{p_2}{p_1}-\ln\dfrac{1-p_2}{1-p_1}},$$

$$d_1=\frac{\ln B}{\ln\dfrac{p_2}{p_1}-\ln\dfrac{1-p_2}{1-p_1}},\qquad d_2=\frac{\ln A}{\ln\dfrac{p_2}{p_1}-\ln\dfrac{1-p_2}{1-p_1}},$$

$$R_n=cn+d_1,\qquad A_n=cn+d_2。$$

易知$c>0,d_1>0,d_2<0$。不难看出，$\lambda_n\geqslant B$ 的充要条件是 $S_n\geqslant R_n$；$\lambda_n\leqslant A$ 的充要条件是 $S_n\leqslant A_n$，故停止法则（停时）是

$$\tau^*=\inf\{n:\ n\geqslant 1,\ S_n\overline{\in}(A_n,R_n)\}。$$

我们可用图来表示这个检验方案。图 2.1 中横坐标表示抽样量，纵坐标是样本和S_n的值。当点(n,S_n)落在两条平行直线之间时，继续抽样（观测），否则停止抽样（观测）。

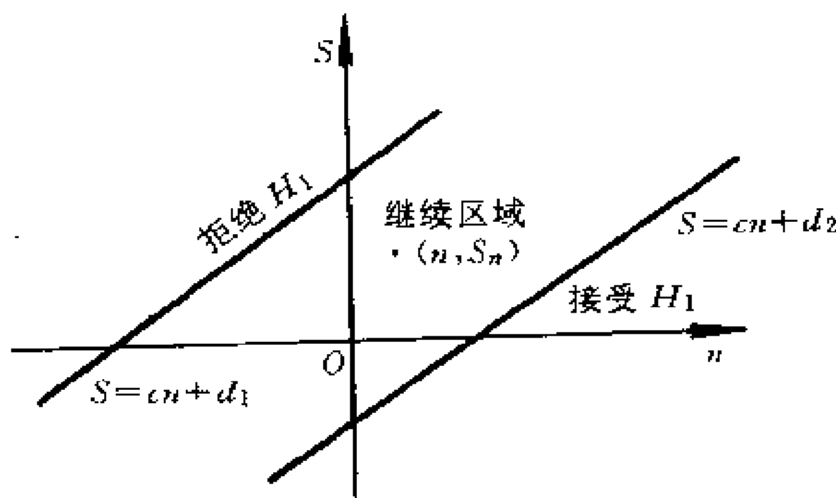


图 2.1

例2.2 正态分布情形。

设$X\sim N(\theta,1)$，$\theta\in(-\infty,\infty)$，分布密度(关于Lebesgue 测度)是：

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2\right\}.$$

检验假设H_1：$\theta=\theta_1$，对立假设是H_2：$\theta=\theta_2$($\theta_1<\theta_2$，θ_1,θ_2已知)。

设$X_1,X_2,\cdots$是X的独立观测序列，此时从(2.1)知

$$\lambda_n=e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n(X_i-\theta_2)^2}\Big/e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n(X_i-\theta_1)^2},$$

$$\ln\lambda_n=(\theta_2-\theta_1)S_n+\frac{n}{2}(\theta_1^2-\theta_2^2),$$

这里$S_n=\sum_1^n X_i\,(n\geqslant1)$。不难推知，$S(A,B)$的停止法则是

$$\tau^*=\inf\left\{n:\ n\geqslant1,\ S_n\overline{\in}\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}n+c,\ \frac{\theta_1+\theta_2}{2}n+d\right)\right\},$$

这里

$$c=(\ln A)/(\theta_2-\theta_1),\qquad d=(\ln B)/(\theta_2-\theta_1).$$

这个检验法也可用图2.2表示。

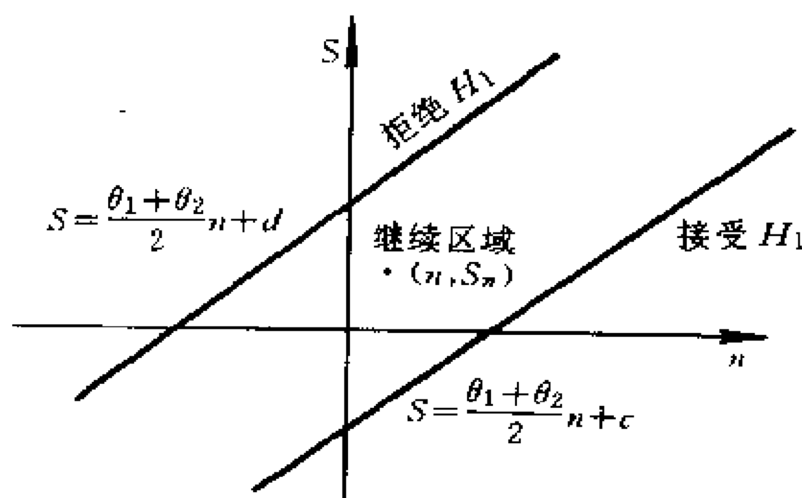


图 2.2

从上述例子看出，序贯概率比检验法的实施并不复杂，它仅仅依赖事先选定的常数A与B。怎样选定A,B呢？这就需要仔细研究 SPRT 的性质。很自然地有下列四个问题：

1）是否有限步后一定会停止观测（抽样）？即是否成立：

$$P_i(\tau^*<\infty)=1\ (i=1,2)?$$

2）如何计算P_i（接受H_1）的值？注意

$$P_i(\text{接受}H_1)=P_i(\tau^*<\infty,\lambda_{\tau^*}\leqslant A).$$

我们希望$i=1$时这个概率很大，$i=2$时这个概率很小。通常记

$$\alpha=P_1(\tau^*<\infty,\ \lambda_{\tau^*}\geqslant B),$$

$$\beta=P_2(\tau^*<\infty,\ \lambda_{\tau^*}\leqslant B).$$

希望找出α,β与A,B之间的关系，从而根据给定的α,β来确定A,B。

3）如何计算平均样本量$E_i\tau^*(i=1,2)$？这里E_i表示与测度P_i相应的数学期望。自然我们希望$E_i\tau^*$越小越好。

4）$S(A,B)$有何优良性？特别是：有无检验法比 SPRT 还要"优"？

怎样研究这些问题呢？一个基本观点是：SPRT 的研究可化为随机游动的研究。

从(2.1)知

$$\ln \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \ln(f_2(X_i)/f_1(X_i)) \quad (n \geqslant 1).$$

令

$$z_i = \ln(f_2(X_i)/f_1(X_i)) \quad (i=1,2,\cdots),$$
$$Z_n = \ln \lambda_n,$$

则

$$Z_n = \sum_{1}^{n} z_i \quad (n \geqslant 1).$$

注意$z_1, z_2, \cdots$是$(\Omega, \mathscr{F}, P_i)$ $(i=1,2)$上的相互独立同i分布的随机变量列，$\{Z_n, n \geqslant 1\}$就是通常所谓的随机游动，而$S(A,B)$之停止法则恰好是：

$$\tau^* = \inf\{n:\ n \geqslant 1, z_n \overline{\in} (\ln A, \ln B)\},$$

即随机游动首次离开区间$(\ln A, \ln B)$之时间．我们在§3中对随机游动进行一番专题研究，然后再论述 SPRT 的性质。

§3　随机游动的一些性质

本节内容有普遍意义，不仅对于研究 SPRT 的性质是必要的，对于研究更一般的序贯假设检验与序贯估计也都是很重要的。

本节恒设$z_1, z_2, \cdots$是$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上相互独立同分布的实值随机变量列，

$$Z_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} z_i, \quad \mathscr{F}_n \triangleq \sigma(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n) \quad (n \geqslant 1),$$

序列$(Z_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1)$是所谓的随机游动。

引理3.1　(Wald 方程)　设τ是$\{Z_n, n \geqslant 1\}$的任一停时，若Ez_1存在且$E\tau < \infty$，则有

$$EZ_\tau = Ez_1 \cdot E\tau, \tag{3.1}$$

这里 $Z_\tau = Z_{\tau(\omega)}(\omega)$。

证明 记

$$x^+ = \max(x,0), \quad x^- = \max(-x,0).$$

由于$\{\tau \geqslant i\} \in \sigma(z_1, \cdots, z_{i-1})$，故 $I_{\{\tau \geqslant i\}}$与 z_i^+ 相互独立，于是

$$E\left(\sum_{i=1}^{\tau} z_i^+\right) = E\left(\sum_{i=1}^{\infty} I_{\{\tau \geqslant i\}} z_i^+\right) = \sum_{i=1}^{\infty} E(I_{\{\tau \geqslant i\}}) \cdot Ez_i^+$$

$$= Ez_1^+ \cdot \sum_{i=1}^{\infty} E(I_{\{\tau \geqslant i\}}) = Ez_1^+ \cdot E\tau.$$

同理知

$$E\left(\sum_{i=1}^{\tau} z_i^-\right) = Ez_1^- \cdot E\tau.$$

由于 Ez_1^+ 与 Ez_1^- 中至少一个有限，故

$$E\left(\sum_{i=1}^{\tau} Z_\tau\right) = E\left(\sum_{i=1}^{\tau} (z_i^+ - z_i^-)\right) = E\left(\sum_{i=1}^{\tau} z_i^+\right) - E\left(\sum_{i=1}^{\tau} z_i^-\right)$$

$$= Ez_1 \cdot E\tau.$$

这就证明了(3.1)成立。证毕。

(3.1)就是所谓 Wald 方程。值得注意的是，若 $Ez_1 \neq 0$，$E\tau = \infty$，$E(Z_\tau)$存在，则(3.1)式仍成立，但证明稍为复杂一些，有兴趣的读者可参看 Chow and Teicher(1978)。

引理3.2 设 $Ez_1^2 < \infty$，$Ez_1 = 0$，τ 是$\{Z_n, n \geqslant 1\}$的任一停时。只要 $E\tau < \infty$，则有

$$EZ_\tau^2 = Ez_1^2 \cdot E\tau. \tag{3.2}$$

证明 使用记号 $a \wedge b \triangleq \min(a,b)$。易知

$$Z_{\tau \wedge n} = \sum_{j=1}^{n} I_{\{\tau \geqslant j\}} z_j.$$

规定 $Z_0 = 0$。任意固定 $n > m \geqslant 0$，易知

$$E(Z_{\tau\wedge n}-Z_{\tau\wedge m})^2=E\Big(\sum_{j=m+1}^{n} I_{(\tau\geq j)}z_j\Big)^2$$

$$=\sum_{j=m+1}^{n} E(I_{(\tau\geq j)}z_j^2)+2\sum_{m<i<j<n} E(I_{(\tau\geq j)}z_i z_j).$$

由于 $I_{(\tau\geq j)}$ 是 $\sigma(z_1,\cdots,z_{j-1})$ 可测的，z_i 也是 $\sigma(z_1,\cdots,z_{j-1})$ 可测的(当 $i<j$ 时)，利用独立性知

$$E(I_{(\tau\geq j)}z_j^2)=Ez_1^2\cdot E(I_{(\tau\geq j)}),$$

$$E(I_{(\tau\geq j)}z_i z_j)=E(I_{(\tau\geq j)}z_i)\cdot Ez_j=0(i<j).$$

于是

$$E(Z_{\tau\wedge n}-Z_{\tau\wedge m})^2=Ez_1^2\cdot E\Big(\sum_{j=m+1}^{n} I_{(\tau\geq j)}\Big)$$

$$=Ez_1^2(E(\tau\wedge n)-E(\tau\wedge m)), \qquad (3.3)$$

令 $n\to\infty$ 得到

$$E(Z_\tau-Z_{\tau\wedge m})^2\leqslant Ez_1^2\cdot(E\tau-E(\tau\wedge m)),$$

从而

$$\lim_m E(Z_\tau-Z_{\tau\wedge m})^2=0.$$

于是

$$EZ_\tau^2=\lim_n EZ_{\tau\wedge n}^2.$$

在(3.3)中令 $m=0$ 知

$$EZ_{\tau\wedge n}^2=Ez_1^2\cdot E(\tau\wedge n).$$

故 $EZ_\tau^2=Ez_1^2\cdot E\tau$。证毕。

要注意的是，若 $E\tau=\infty$，则(3.2)可能不成立。

例3.1 设 $z_1,z_2,\cdots$ 是独立同分布随机变量列，$z_1=1$ 或 -1，$P(z_1=1)=\frac{1}{2}$。令

$$\tau=\inf\{n:\ n\geqslant 1, Z_n=1\},$$

这里 $Z_n=\sum_1^n z_i$。利用下面的引理 3.3 知 $P(\tau<\infty)=1$。于是 $EZ_\tau^2=1$，$Ez_1^2=1$。但 $P(\tau=1)=\frac{1}{2}$，$E\tau>1$。可见此时(3.2)不

成立。

引理3.3(Chung-Fuchs) 设 $Ez_1=0$，$P(z_1=0)<1$，则

$$\overline{\lim_{n}}\, Z_n = \infty \quad (\text{a.s.}), \tag{3.4}$$

$$\underline{\lim_{n}}\, Z_n = -\infty (\text{a.s.}). \tag{3.5}$$

证明 只须证明(3.4)。令

$$q=P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{Z_n<0\}\Big),\qquad A_n=\bigcap_{k\neq n}\{Z_k<Z_n\},$$

则

$$\begin{aligned}P(A_n)&=P\{\text{对一切 }k<n, Z_n-Z_k>0 \text{ 且对一切}k>n, Z_k-Z_n<0\}\\&=P(Z_n-Z_k>0, k=1,\cdots,n-1)\\&\quad\cdot P(\text{对一切 }k>n, Z_k-Z_n<0)\\&=P(Z_n-Z_k>0, k=1,\cdots,n-1)\cdot q.\end{aligned}$$

令 $t=\inf\{n:\ n\geqslant1, Z_n\leqslant0\}$，则

$$\begin{aligned}&P(Z_n-Z_k>0, k=1,2,\cdots,n-1)\\&\quad=P(z_n>0, z_n+z_{n-1}>0,\cdots,z_n+\cdots+z_2>0)\\&\quad=P(Z_1>0, Z_2>0,\cdots,Z_{n-1}>0)\\&\quad=P(t\geqslant n),\end{aligned}$$

故

$$P(A_n)=qP(t\geqslant n).$$

我们指出 $q=0$。用反证法。设 $q>0$，则

$$1\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=q\cdot\sum_{n=1}^{\infty}P(t\geqslant n)=q\cdot Et,$$

于是 $Et<\infty$。利用引理3.1知

$$EZ_t=Ez_1\cdot Et=0,$$

于是 $Z_t=0$ (a.s.)。但是

$$P(Z_t<0)\geqslant P(Z_1<0)\geqslant q>0.$$

这个矛盾就证明了 $q=0$，从而

$$P(\{\text{存在 }n\geqslant1\text{ 使 }Z_n\geqslant0\})=1.$$

令

$$Z_0 = t_0 = 0,$$
$$t_n \triangleq \inf\{k: k > t_{n-1}, Z_k \geqslant Z_{t_{n-1}}\} \quad (n \geqslant 1).$$

于是 $P(t_n < \infty) = 1$ ($n \geqslant 0$)。不难证明 $Z_{t_1} - Z_{t_0}, Z_{t_2} - Z_{t_1}, \cdots$ 是相互独立同分布的非负随机变量列。我们指出 $0 < EZ_{t_1} \leqslant \infty$。实际上，$Z_{t_1} \geqslant 0$而且

$$P(Z_{t_1} > 0) \geqslant P(z_1 > 0) > 0,$$

故 $EZ_{t_1} > 0$。利用强大数律知

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}}) = EZ_{t_1} > 0 \quad (\text{a.s.}),$$

故
$$\lim_n Z_{t_n} = \infty \quad (\text{a.s.}).$$

所以(3.4)成立。证毕。

给定区间(a,b)，这里 $-\infty < a < 0 < b < \infty$。我们来研究随机游动$\{Z_n, n \geqslant 1\}$首次离开区间$(a,b)$的时刻 τ^*，即

$$\tau^* = \inf\{n: n \geqslant 1, Z_n \overline{\in} (a,b)\}. \tag{3.6}$$

从引理3.3知道，只要 Ez_1 存在，$P(z_1 = 0) < 1$，则

$$P(\tau^* < \infty) = 1.$$

实际上，若 $Ez_1 \neq 0$，则从强大数律知

$$\lim_n Z_n = \infty \text{ 或 } -\infty \quad (\text{a.s.}).$$

若 $Ez_1 = 0$，则从(3.4)知

$$\overline{\lim_n} Z_n = \infty \quad (\text{a.s.}).$$

总之有 $P(\tau^* < \infty) = 1$。

下面指出，无论 Ez_1 存在与否，只要 $P(z_1 = 0) < 1$，恒有 $P(\tau^* < \infty) = 1$。我们还可证明更深刻的结论。

引理3.4(Stein) 设 $P(z_1 = 0) < 1$，则存在常数 $M > 0, \gamma > 0$ 满足：

$$P(\tau^* > n) \leqslant M e^{-\gamma n} \quad (n \geqslant 1), \tag{3.7}$$

这里 τ^* 由(3.6)式定义。

证明 首先指出，存在 $m\geqslant 1$，使得

$$P(|Z_m|>b-a)\triangleq p>0.$$

实际上，既然 $P(z_1=0)<1$，故有 $\delta>0$，满足 $P(|z_1|>\delta)>0$。取 $m\geqslant\frac{b-a}{\delta}$ 就行了。这是因为

$$\begin{aligned}P(Z_m>b-a)&\geqslant P(z_1>\delta,z_2>\delta,\cdots,z_m>\delta)\\&=[P(z_1>\delta)]^m,\end{aligned}$$

同理 $$P(Z_m<-(b-a))\geqslant[P(z_1<-\delta)]^m.$$

故 $$P(|Z_m|>b-a)>0.$$

任意给定 $n>m$，令 $q=\left[\frac{n}{m}\right]$（整数部分），$I_0=(a,b)$，则

$$\begin{aligned}P(\tau^*>n)&=P(Z_1\in I_0,\cdots,Z_n\in I_0)\\&\leqslant P(Z_m\in I_0,Z_{2m}\in I_0,\cdots,Z_{qm}\in I_0)\\&\leqslant P(|Z_m|\leqslant b-a,|Z_{2m}-Z_m|\leqslant b-a,\\&\quad\cdots,|Z_{qm}-Z_{(q-1)m}|\leqslant b-a)\\&=[P(|Z_m|\leqslant b-a)]^q\\&=(1-p)^q\leqslant(1-p)^{\frac{n}{m}-1}.\end{aligned}$$

若 $p<1$，则

$$P(\tau^*>n)\leqslant\frac{1}{1-p}\exp\left\{-\frac{n}{m}\ln\frac{1}{1-p}\right\}\quad(n>m);$$

当 $p=1$ 时，

$$P(\tau^*>n)=0\quad(n>m).$$

总之存在 $\gamma>0$ 及 $M>0$，满足(3.7)。证毕。

引理3.5 设 $P(z_1=0)<1$，则 $P(\tau^*<\infty)=1$ 且对一切 $\lambda<\gamma$（这 γ 是(3.7)中的正数），有 $Ee^{\lambda\tau^*}<\infty$。

证明 这些从引理3.4不难得到。证毕。

从引理3.5推知，对一切正整数 m，$E(\tau^*)^m<\infty$。

定理3.1 设 $z_1,z_2,\cdots$ 是相互独立同分布随机变量列，

$$P(z_1=0)<1,\quad Z_n=\sum_1^n z_i\quad(n\geqslant 1),$$

$$-\infty<a<0<b<\infty,$$

且

$$\tau^*=\inf\{n:\ n\geqslant 1, Z_n\overline{\in}(a,b)\},$$

则有下列结论：

1) 若 Ez_1 存在，那末

$$EZ_{\tau^*}=Ez_1\cdot E\tau^*;\tag{3.8}$$

2) 若 $Ez_1=0, Ez_1^2<\infty$，那末

$$EZ_{\tau^*}^2=Ez_1^2\cdot E\tau^*;\tag{3.9}$$

3) 若 $f(t)=Ee^{tz_1}<\infty$（对某个 t）且 $f(t)\geqslant 1$，那末

$$E(e^{tZ_{\tau^*}}/(f(t))^{\tau^*})=1.\tag{3.10}$$

证明 从引理3.5知 $E\tau^*<\infty$，利用引理3.1和引理 3.2 就得到(3.8)和(3.9)。下面来证明(3.10)成立。

$$\int_{\{\tau^*\leqslant n\}}\frac{e^{tZ_{\tau^*}}}{[f(t)]^{\tau^*}}dP$$

$$=\sum_{k=1}^n\int_{\{\tau^*=k\}}\frac{e^{tZ_k}}{[f(t)]^k}dP$$

$$=\sum_{k=1}^n\left[\int_{\{\tau^*\geqslant k\}}\frac{e^{tZ_k}}{[f(t)]^k}dP-\int_{\{\tau^*\geqslant k+1\}}\frac{e^{tZ_k}}{[f(t)]^k}dP\right]$$

$$=\sum_{k=1}^n\left[\int_{\{\tau^*\geqslant k\}}\frac{e^{tZ_{k-1}}}{[f(t)]^{k-1}}\cdot\frac{e^{tz_k}}{f(t)}dP\right.$$

$$\left.-\int_{\{\tau^*\geqslant k+1\}}\frac{e^{tZ_k}}{[f(t)]^k}dP\right]$$

$$=\sum_{k=1}^n\left[\int_{\{\tau^*\geqslant k\}}\frac{e^{tZ_{k-1}}}{[f(t)]^{k-1}}dP-\int_{\{\tau^*\geqslant k+1\}}\frac{e^{tZ_k}}{[f(t)]^k}dP\right]$$

$$= 1 - \int_{\{\tau^* > n\}} \frac{e^{tZ_n}}{[f(t)]^n} dP \text{（注意 } Z_0 \triangleq 0\text{）。}$$

但

$$\int_{\{\tau^* > n\}} \frac{e^{tZ_n}}{[f(t)]^n} dP$$

$$\leqslant \int_{\{\tau^* > n\}} e^{|t|(b-a)} dP = e^{|t|(b-a)} P(\tau^* > n) = o(1)(n \to \infty),$$

这就证明了(3.10)成立。证毕。

(3.10)就是所谓序贯分析基本恒等式，它在某些计算问题中是有用的。还须指出的是，条件“$f(t) \geqslant 1$”可以去掉，不过证明方法需要改变一下。

例3.2（赌博） 设甲有资本M元，乙有资本N元(M,N是正整数)，每一局中若甲胜，乙给甲一元；若乙胜，甲给乙一元。设每局里甲胜的概率是$p(0<p<1)$。问：如果一局一局地赌下去，甲输光的概率是多少？平均几局后有一方输光？

这个问题可用随机游动的理论来解决。令

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 局甲胜,} \\ -1, & \text{第 } i \text{ 局乙胜,} \end{cases} \quad i \geqslant 1.$$

我们假设 $z_1, z_2, \cdots$是独立同分布的，

$$P(z_i = 1) = p, \quad Z_n = \sum_{i=1}^{n} z_i \quad (n \geqslant 1),$$

Z_n 表示第 n 局末甲手中赢得的钱数(可以是负数)。令

$$\tau^* = \inf\{n;\ n \geqslant 1, Z_n \notin (-M, N)\}.$$

显然，τ^* 表示到一方输光为止的局数。甲输光的概率等于$P(Z_{\tau^*} = -M)$。显然 $Ez_1 = 2p - 1$。以下分两种情况讨论。

1) $p = \frac{1}{2}$。

此时 $Ez_1=0$，$EZ_{\tau^*}=Ez_1\cdot E\tau^*=0$。但是

$$EZ_{\tau^*}=-MP(Z_{\tau^*}=-M)+NP(Z_{\tau^*}=N),$$

于是

$$P(Z_{\tau^*}=-M)=\frac{N}{M+N},$$

$$P(Z_{\tau^*}=N)=\frac{M}{M+N},$$

这分别是甲、乙输光的概率。

利用引理3.2知

$$EZ_{\tau^*}^2=Ez_1^2\cdot E\tau^*,$$

但是 $Ez_1^2=1$，

$$EZ_{\tau^*}^2=M^2\cdot\frac{N}{M+N}+N^2\frac{M}{M+N}=MN.$$

故 $E\tau^*=MN$。

2) $p\neq\frac{1}{2}$.

此时，引理3.1及引理3.2都不够用，要用基本恒等式(3.10)。因为

$$f(t)=Ee^{tz_1}=pe^t+(1-p)e^{-t},$$

故 $t_0=\ln\frac{1-p}{p}$时 $f(t_0)=1$。从(3.10) 知 $Ee^{t_0Z_{\tau^*}}=1$，即有

$$Le^{-t_0M}+(1-L)\,e^{t_0N}=1,$$

这里 $L=P(Z_{\tau^*}=-M)$是甲输光的概率。易知

$$L=\frac{[(1-p)/p]^N-1}{[(1-p)/p]^N-[(1-p)/p]^{-M}},$$

$$E\tau^*=\frac{1}{Ez_1}EZ_{\tau^*}=\frac{N-L(M+N)}{2p-1},$$

后者就是到一方输光为止所需要的平均局数。

从这个例子看出，若要有效地利用基本恒等式(3.10)，关键在于是否有 $t_0 \neq 0$ 满足

$$f(t_0)=Ee^{t_0 z_1}=1.$$

下面的引理表明，很多情况下 t_0 是存在的。

引理3.6 设随机变量 z 满足：

i) $P(z>0)>0$, $P(z<0)>0$;

ii) 对一切实数 t, $Ee^{tz}<\infty$,

则当 $Ez\neq 0$ 时恰有一个非零的实数 t_0 满足 $Ee^{t_0 z}=1$；当 $Ez=0$ 时，只有 $t_0=0$ 能使得 $Ee^{t_0 z}=1$.

证明 记 $f(t)=Ee^{tz}$。利用条件 ii)及控制收敛定理知

$$f'(t)=E(ze^{tz}),\quad f''(t)=E(z^2e^{tz})>0,$$

故 $f(t)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上之凸函数. 取 $\delta>0$ 使得 $P(z>\delta)>0$，于是，$t>0$ 时，

$$f(t)\geqslant\int_{\{z>\delta\}}e^{t\delta}dP\geqslant e^{t\delta}P(z>\delta),$$

故 $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\infty$。同理 $\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=\infty$。故 $f(t)$ 在某点 t_1 达到最小值，于是 $f'(t_1)=0$。$f(t)$ 在 $[t_1,\infty)$ 上严格增加，在 $(-\infty,t_1]$ 上严格减少，因此，集合 $\{t: f(t)=1\}$ 至多有两个元素。以下分两种情况：

1) $Ez\neq 0$。此时，$f'(0)=Ez\neq 0$，故 $t_1\neq 0$，于是

$$f(t_1)<f(0)=1.$$

若 $t_1>0$，则有 $t_0\in(t_1,\infty)$ 满足 $f(t_0)=1$；若 $t_1<0$，则有 $t_0\in(-\infty,t_1)$ 满足 $f(t_0)=1$。

2) $Ez=0$。此时，$f'(0)=Ez=0$，于是 $t_1=0$，故 $f(t_1)=1$. 由于 $f(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上严格增加，在 $(-\infty,0]$ 上严格减少，于是对一切 $t\neq 0$，$f(t)\neq 1$。证毕。

对于随机游动 $\{Z_n,n\geqslant 1\}$，我们最关心的是量 $L\triangleq P(Z_{\tau^*}\leqslant a)$ 及 $E\tau^*$，这里 τ^* 是由(3.6)式定义的。要给出一般情形下精确的

计算公式是很困难的，但我们可给出有实用价值的近似公式。

设$P(z_1=0)<1$，有$t_0\neq0$满足$f(t_0)=Ee^{t_0z_1}=1$。则有下列结果：

(1) $$L\doteq\frac{e^{t_0b}-1}{e^{t_0b}-e^{t_0a}},\tag{3.11}$$

这里$L=P(Z_{\tau^*}\leqslant a)$；

(2) $$EZ_{\tau^*}\doteq b+L(a-b);\tag{3.12}$$

(3) 若$Ez_1\neq0$，那么

$$E\tau^*\doteq\frac{b+L(a-b)}{Ez_1};\tag{3.13}$$

(4) 若$Ez_1=0$，$Ez_1^2<\infty$，那么

$$EZ_{\tau^*}^2\doteq La^2+(1-L)b^2,\tag{3.14}$$

$$E\tau^*\doteq\frac{La^2+(1-L)b^2}{Ez_1^2}.\tag{3.15}$$

理由 由基本恒等式(3.10)知$E(e^{t_0Z_{\tau^*}})=1$。在集合$\{Z_{\tau^*}\leqslant a\}$上用$a$作为$Z_{\tau^*}$的近似值，在集合$\{Z_{\tau^*}\geqslant b\}$上用$b$作为$Z_{\tau^*}$的近似值，换句话说，我们近似地认为，随机游动首次离开区间(a,b)时的位置是区间的端点(即忽略了位置Z_{τ^*}与该区间(a,b)之间的距离(overshoot))。于是得到

$$\int_{\{Z_{\tau^*}\leqslant a\}}e^{t_0a}dP+\int_{\{Z_{\tau^*}\geqslant b\}}e^{t_0b}dP\doteq1.\tag{3.16}$$

从(3.16)立即推出(3.11)。

采取上述的近似观点，即将Z_{τ^*}看成取值a,b的随机变量，从定理3.1不难得到(3.12)至(3.15)。

读者可能还不满足，(3.11)至(3.15)只是近似公式，到底误差有多大？我们可以建立一些精密的不等式，有兴趣的读者请看本章§6。

作为本节的末尾，我们研究随机游动首次离开无穷区间的时刻。

定理3.2 设$z_1, z_2, \cdots$是$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上独立同分布的随机变量列，

$$Ez_1>0, \quad Z_n=\sum_1^n z_i \quad (n\geqslant 1),$$

而且

$$\tau=\inf\{n: n\geqslant m, Z_n>C\},$$

其中C是实数，m是正整数，则$E\tau<\infty$。

证明 首先考虑一个特殊情况：$z_1\leqslant M$，这里M是一个固定的正数。当$n\geqslant m$时，

$$\sum_{i=1}^{\tau\wedge n} z_i=\sum_{i=1}^{(\tau\wedge n)-1} z_i+z_{\tau\wedge n}\leqslant C+M \quad (\text{a.s.}).$$

从引理3.1知$Ez_1\cdot E(\tau\wedge n)\leqslant C+M$，故

$$E(\tau\wedge n)\leqslant\frac{1}{Ez_1}(C+M).$$

令$n\to\infty$得

$$E\tau\leqslant\frac{1}{Ez_1}(C+M).$$

在一般情形下，取M充分大使得$E(z_1\wedge M)>0$。由于

$$\sum_{i=1}^n(z_i\wedge M)\leqslant\sum_{i=1}^n z_i,$$

故

$$\tilde{\tau}\triangleq\inf\left\{n: n\geqslant m, \sum_1^n(z_i\wedge M)>C\right\}\geqslant\tau.$$

根据已证部分知

$$E\tau\leqslant E\tilde{\tau}\leqslant\frac{1}{E(z_1\wedge M)}(C+M)<\infty.$$

证毕。

§ 4 SPRT 的一些性质

设 $X_1, X_2, \cdots$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P_i)$ $(i=1,2)$ 上的相互独立同分布的随机变量(随机元)列，X_i 取值于可测空间 $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$. X_1 在 P_i 下的分布密度是 $f_i(x)$（关于某个 σ 有限的测度 μ），$i=1,2$，这里 f_1, f_2 是不同的，即满足：

$$\mu\{x:\ f_1(x) \neq f_2(x)\} > 0. \tag{4.1}$$

我们来检验简单假设：

H_1: f_1 是 X_1 的真正的分布密度(对立假设是 H_2: f_2 是 X_1 的真正的分布密度)。

根据 SPRT $S(A,B)$ 的定义，停止法则(停时)是

$$\tau^* = \inf\{n:\ n \geqslant 1, \lambda_n \notin (A, B)\},$$

这里

$$\lambda_n = \prod_{i=1}^{n} f_2(X_i) \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_1(X_i) \quad (n \geqslant 1).$$

记

$$L_1 = P_1(\text{接受 } H_1) = P_1(\tau^* < \infty, \lambda_{\tau^*} \leqslant A),$$
$$L_2 = P_2(\text{接受 } H_1),$$
$$\alpha = P_1(\text{拒绝 } H_1) = 1 - L_1,$$
$$\beta = P_2(\text{接受 } H_1) = L_2.$$

我们很关心 τ^* 及 α, β 的大小.

定理4.1 对于 $i=1,2$，均有 $P_i(\tau^* < \infty) = 1$ 且

$$E_i e^{\lambda \tau^*} < \infty \ (\text{对某个 } \lambda > 0), \tag{4.2}$$
$$E_i (\tau^*)^k < \infty \ (\text{一切 } k \geqslant 1). \tag{4.3}$$

证明 令

$$z_i \triangleq \ln(f_2(X_i)/f_1(X_i))\text{①} \quad (i \geqslant 1),$$

① 为了避免出现ln0，我们假设 $\tilde{P}_1$ 与 $\tilde{P}_2$ 相互绝对连续，这里 $\tilde{P}_i(B) = P_i(X_1 \in B)$ $(B \in \mathscr{B})$，$i=1,2$. 即 X_1 的概率分布相互绝对连续。

$$Z_n = \ln \lambda_n = z_1 + \cdots + z_n,$$

$$a = \ln A, \quad b = \ln B,$$

则$\{Z_n, n \geq 1\}$是随机游动，且

$$\tau^* = \inf\{n: n \geq 1, Z_n \notin (a,b)\}.$$

利用不等式 $\ln x < x - 1$ （$x > 0$ 且 $x \neq 1$），从(4.1)知

$$E_1 z_1 = \int_{\mathscr{X}} f_1(x) \ln \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \mathrm{d}\mu < \int_{\mathscr{X}} f_1(x) \left[\frac{f_2(x)}{f_1(x)} - 1\right] \mathrm{d}\mu = 0.$$

这表明 $E_1 z_1$ 存在且 $P_1(z_1 = 0) < 0$。同理知

$$E_2 z_1 > 0, \quad P_2(z_1 = 0) < 1.$$

利用引理3.5就得到所要的结论。证毕。

定理4.2

$$\alpha \leq \frac{1}{B}(1 - \beta), \quad \beta \leq A(1 - \alpha). \tag{4.4}$$

证明 首先指出，对任何 $A \in \sigma(X_1, \cdots, X_n)$，有

$$P_2(A) = \int_A \lambda_n \mathrm{d}P_1, \tag{4.5}$$

$$P_1(A) = \int_A \frac{1}{\lambda_n} \mathrm{d}P_2. \tag{4.6}$$

实际上，有 $B \in \mathscr{B}^n$ 满足

$$A = \{\omega: (X_1, \cdots, X_n) \in B\}.$$

于是

$$P_2(A) = \int_B \prod_{i=1}^n f_2(x_i) \mu(\mathrm{d}x_1) \cdots \mu(\mathrm{d}x_n)$$

$$= \int_B \left(\prod_{i=1}^n f_2(x_i) \Big/ \prod_{i=1}^n f_1(x_i)\right) \prod_{i=1}^n f_1(x_i) \mu(\mathrm{d}x_1) \cdots \mu(\mathrm{d}x_n)$$

$$= \int_A \lambda_n \mathrm{d}P_1.$$

同理知(4.6)成立。于是

$$
\begin{aligned}
\alpha &= P_1(\lambda_{\tau^*} \geqslant B) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P_1(\tau^* = n, \lambda_n \geqslant B) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(\tau^* = n,\ \lambda_n \geqslant B)} \frac{1}{\lambda_n} \mathrm{d}P_2 \\
&\leqslant \frac{1}{B} \sum_{n=1}^{\infty} P_2(\tau^* = n, \lambda_n \geqslant B) = \frac{1}{B} P_2(\lambda_{\tau^*} \geqslant B) \\
&= \frac{1}{B}(1-\beta).
\end{aligned}
$$

同理可证 $\beta \leqslant A(1-\alpha)$。证毕。

从(4.4)知

$$\frac{\beta}{1-\alpha} \leqslant A < B \leqslant \frac{1-\beta}{\alpha}.$$

在实用上常用近似公式：

$$A \doteq \frac{\beta}{1-\alpha}, \qquad B \doteq \frac{1-\beta}{\alpha}. \tag{4.7}$$

从定理4.2的证明过程来看，若 $\lambda_{\tau^*} = A$ 或 B（即 $Z_{\tau^*} = a$ 或 b），则(4.7)便是精确的公式。

公式(4.7)的重要意义在于：对于给定的 α, β，很容易确定 A, B 的值，从而得到了所要的SPRT。在确定 A, B 时，根本不需要了解总体（随机变量 X_i）的分布类型是什么，也不像普通的固定样本量检验法那样要查什么临界值表。

对于给定的 α, β，使用(4.7)可得到 A, B 的近似值

$$A^* = \frac{\beta}{1-\alpha}, \qquad B^* = \frac{1-\beta}{\alpha}.$$

当然，方案 $S(A^*, B^*)$ 的两类错误的概率与 α, β 可能不同，但却恒有下列重要不等式。

定理4.3 给定 $\alpha > 0, \beta > 0$（满足 $\alpha + \beta < 1$）。设

$$A^* = \frac{\beta}{1-\alpha}, \qquad B^* = \frac{1-\beta}{\alpha},$$

$S(A^*, B^*)$之两类错误的概率分别是 α^*, β^*，则恒有

$$\alpha^* \leqslant \frac{\alpha}{1-\beta}, \qquad \beta^* \leqslant \frac{\beta}{1-\alpha},$$

$$\alpha^* + \beta^* \leqslant \alpha + \beta. \tag{4.8}$$

证明 从条件 $\alpha + \beta < 1$ 知 $A^* < B^*$。从定理 1.2 知

$$\alpha^* \leqslant \frac{1}{B^*}(1-\beta^*) = \frac{\alpha}{1-\beta}(1-\beta^*) \leqslant \frac{\alpha}{1-\beta},$$

$$\beta^* \leqslant A^*(1-\alpha^*) = \frac{\beta}{1-\alpha}(1-\alpha^*) \leqslant \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

于是

$$(1-\beta)\alpha^* \leqslant \alpha(1-\beta^*), \qquad (1-\alpha)\beta^* \leqslant \beta(1-\alpha^*).$$

将这两个不等式的两边分别相加，得 $\alpha^* + \beta^* \leqslant \alpha + \beta$。证毕。

(4.8)式表明，采用近似公式(4.7)后，两类错误的概率之和是不增大的。

设 $z_1 = \ln(f_2(X_1)/f_1(X_1))$。若有 $h_i \neq 0$ 满足

$$E_i(e^{h_i z_1}) = 1,$$

则从定理 3.2 知

$$L_i \doteq \frac{B^{h_i} - 1}{B^{h_i} - A^{h_i}},$$

$$E_i \tau^* \doteq \frac{L_i \ln A + (1-L_i)\ln B}{E_i z_1},$$

这里 $i = 1, 2$。从而 $\alpha = 1 - L_1$，$\beta = L_2$ 也可近似求出。

若取 $A \doteq \frac{\beta}{1-\alpha}$，$B \doteq \frac{1-\beta}{\alpha}$，则得到

$$E_1 \tau^* \doteq \frac{(1-\alpha)\ln(\beta/(1-\alpha)) + \alpha\ln((1-\beta)/\alpha)}{E_1 z_1}, \tag{4.9}$$

$$E_2 \tau^* \doteq \frac{\beta\ln(\beta/(1-\alpha)) + (1-\beta)\ln((1-\beta)/\alpha)}{E_2 z_1}. \tag{4.10}$$

这两个式子表示了SPRT的平均样本量 $E_i\tau^*$ 与两类错误的概率 α,β 之间的近似关系。值得注意的是，若 $Z_{\tau^*}=\ln A$ 或 $\ln B$，则(4.9)和(4.10)都是精确的等式，这从定理4.2的推导过程可以看出。

我们将指出，设 $\Delta=(\tau,d)$ 是任何序贯检验法（τ 是停止法则，d 是判决法则），它的两类错误的概率分别是 α_1,β_1。若 $\alpha_1\leqslant\alpha$，$\beta_1\leqslant\beta$，则(4.9)和(4.10)式的右端分别为 $E_1\tau,E_2\tau$ 的下界。注意，判决法则 d 是可测空间 $(\Omega_\tau,\mathscr{F}_\tau)$ 到二值空间 $\{1,2\}$ 的可测映射，"$d=1$"表示接受假设 H_1，"$d=2$"表示接受假设 H_2。以下记 $\alpha(\Delta)=P_1(d=d_2)$，$\beta(\Delta)=P_2(d=d_1)$。

定理4.4 设 $\Delta=(\tau,d)$ 是关于假设 H_1,H_2 的任一序贯检验法，而且

$$\alpha(\Delta)\leqslant\alpha,\quad \beta(\Delta)\leqslant\beta,\quad \alpha+\beta<1,$$

则恒有

$$E_1^*\tau\geqslant\frac{(1-\alpha)\ln(\beta/(1-\alpha))+\alpha\ln((1-\beta)/\alpha)}{E_1z_1},\tag{4.11}$$

$$E_2\tau\geqslant\frac{\beta\ln(\beta/(1-\alpha))+(1-\beta)\ln((1-\beta)/\alpha)}{E_2z_1},\tag{4.12}$$

这里

$$z_1=\ln(f_2(X_1)/f_1(X_1)),\quad \frac{a}{\pm\infty}\triangleq0.$$

证明 从(4.1)知

$$E_1z_1<0,\quad E_2z_1>0.$$

我们来证明(4.12)成立。记

$$\alpha_1=\alpha(\Delta),\quad \beta_1=\beta(\Delta).$$

若 $E_2z_1=\infty$，或 $E_2\tau=\infty$，则(4.12)当然成立。故以下不妨设

$$E_2z_1<\infty,\quad E_2\tau<\infty.$$

因为 $\alpha_1+\beta_1\leqslant\alpha+\beta<1$，故 $\tau\geqslant1$。仍记

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} z_i, \qquad z_i = \ln(f_2(X_i)/f_1(X_i)) \quad (i \geqslant 1).$$

从引理 3.1 知

$$E_2 Z_\tau = E_2 z_1 \cdot E_2 \tau.$$

下面的工作就是估计 $E_2 Z_\tau$ 的大小。仍记

$$\lambda_n = \prod_{i=1}^{n} f_2(X_i) \Big/ \prod_{i=1}^{n} f_1(X_i).$$

$$\begin{aligned}
E_2 Z_\tau &= \int_{\{d=1\}} \ln \lambda_\tau \mathrm{d}P_2 + \int_{\{d=2\}} \ln \lambda_\tau \mathrm{d}P_2 \\
&= -\beta_1 \int_{\{d=1\}} \ln \lambda_\tau^{-1} P_2(\mathrm{d}\omega \mid d=1) \\
&\quad - (1-\beta_1) \int_{\{d=2\}} \ln \lambda_\tau^{-1} P_2(\mathrm{d}\omega \mid d=2) \\
&\geqslant -\beta_1 \ln \int_{\{d=1\}} \lambda_\tau^{-1} P_2(\mathrm{d}\omega \mid d=1) \\
&\quad - (1-\beta_1) \ln \int_{\{d=2\}} \lambda_\tau^{-1} P_2(\mathrm{d}\,\omega \mid d=2).
\end{aligned}$$

这一步利用了 Jensen 不等式（因为 $\ln x$ 是凹函数）。从(4.5)，(4.6)容易推知，对任何 $\Lambda \in \mathscr{F}_\tau$（即 $\Lambda \subset \Omega_\tau$，对一切 $n \geqslant 1$，$\Lambda \cap \{\tau = n\} \in \sigma(X_1, \cdots, X_n)$），有

$$P_2(\Lambda) = \int_\Lambda \lambda_\tau \mathrm{d}P_1, \tag{4.13}$$

$$P_1(\Lambda) = \int_\Lambda \lambda_\tau^{-1} \mathrm{d}P_2. \tag{4.14}$$

从(4.14)知

$$\int_{\{d=1\}} \lambda_\tau^{-1} \mathrm{d}P_2 = P_1(d=1) = 1 - \alpha_1,$$

$$\int_{\{d=2\}} \lambda_\tau^{-1} \mathrm{d}P_2 = P_1(d=2) = \alpha_1,$$

于是

$$E_2 Z_\tau \geqslant -\beta_1 \ln((1-\alpha_1)/\beta_1) - (1-\beta_1)\ln(\alpha_1/1-\beta_1).$$

从而

$$E_2\tau \geqslant \frac{\beta_1 \ln(\beta_1/1-\alpha_1) + (1-\beta_1)\ln((1-\beta_1)/\alpha_1)}{E_2 z_1};$$

利用微商法知函数

$$\varphi(\alpha,\beta) = \beta\ln(\beta/1-\alpha) + (1-\beta)\ln((1-\beta)/\alpha)$$

是α,β之减函数（当$\alpha+\beta<1$时），现在$\alpha_1 \leqslant \alpha$、$\beta_1 \leqslant \beta$，故(4.12)成立。同理可证(4.11)成立。证毕。

给定正数$\alpha,\beta(\alpha+\beta<1)$，若有$S(A,B)$其两类错误概率分别是$\alpha,\beta$，而且$\lambda_{\tau^*}=A$或$B$，则从定理4.4推知：对任何序贯检验法$\Delta=(\tau,d)$，只要$\alpha(\Delta)\leqslant\alpha$，$\beta(\Delta)\leqslant\beta$，则必有$E_i\tau \geqslant E_i\tau^*$ $(i=1,2)$(因为这时(4.9)，(4.10)是精确的等式)。

这表明$S(A,B)$有一种最优性：它的平均样本量最小.不过，这里的证明方法用到了很强的假定：$\lambda_{\tau^*}=A$或B。其实没有这个假定，结论仍然成立，Wald和Wolfowicz(1948)首先证明了这一点。这是现代理论统计中最深刻的结论之一，但其证明相当烦难。E.L.Lehmann(1959)和T.S.Ferguson(1967)的书中都有论述。我们要在§7中利用Lorden(1980)的方法给出SPRT的最优性的严格而完全的证明。

以上讨论假设检验时，假定总体的真正的分布密度是$f_1(x)$或$f_2(x)$。在实际问题里，很可能真正的分布密度既不是$f_1(x)$，也不是$f_2(x)$，而是$f_0(x)$。此时如何算$S(A,B)$的接受零假设H_1的概率及平均样本量$E_0\tau^*$呢？这个问题可以提成下列一般形式：设$X_1,X_2,\cdots$是$(\Omega,\mathscr{F},P_\theta)(\theta\in\Theta)$上相互独立同分布的随机变量列，$X_1$的分布密度是$f(x,\theta)$（关于某$\sigma$有限测度$\mu$），这里$\Theta$是已知的集合，至少有两个元素。

我们恒设 $\theta' \neq \theta''$ 时，$f(x,\theta')$ 与 $f(x,\theta'')$ 是不同的，即

$$\mu\{x: f(x,\theta') \neq f(x,\theta'')\} > 0.$$

假设 H_1 是 "$\theta=\theta_1$"（即 $f(x,\theta_1)$ 是 X_1 的真正的分布密度），假设 H_2 是 "$\theta=\theta_2$"。对于检验问题

$$H_1 \longleftrightarrow H_2$$

（这表示待检验的假设是 H_1，对立假设是 H_2），我们使用检验法 $S(A,B)$，其停止法则是

$$\tau^* = \inf\{n: n \geqslant 1, \lambda_n \overline{\in} (A,B)\},$$

这里

$$\lambda_n = \prod_{i=1}^{n} f(X_i,\theta_2) \Big/ \prod_{i=1}^{n} f(X_i,\theta_1), \qquad n \geqslant 1.$$

任意给定 $\theta \in \Theta$，我们来计算两个重要的量 $L(\theta)$, $E_\theta \tau^*$，这里 $L(\theta) \triangleq P_\theta$（接受 H_1）叫做检验的施行(操作)特性函数，$E_\theta \tau^* = \int_\Omega \tau^* \mathrm{d}P_\theta$ 是真正密度为 $f(x,\theta)$ 时的平均样本量。记

$$z_i = \ln(f(X_i,\theta_2)/f(X_i,\theta_1)) \quad (i \geqslant 1),$$

$$Z_n = \sum_{1}^{n} z_i \ (n \geqslant 1).$$

则 $(Z_n, n \geqslant 1)$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P_\theta)$ 上的随机游动。从本章§3 立即得到下列结果：

设有 $h(\theta) \neq 0$ 满足 $E_\theta e^{h(\theta) z_1} = 1$，则有下列结论：

1) $L(\theta) \doteq \dfrac{B^{h(\theta)} - 1}{B^{h(\theta)} - A^{h(\theta)}}$；

2) 若 $E_\theta z_1 \neq 0$，那么

$$E_\theta \tau^* \doteq \frac{L(\theta) \ln A + (1 - L(\theta)) \ln B}{E_\theta z_1};$$

3) 若 $E_\theta z_1 = 0$，$E_\theta z_1^2 < \infty$，那么

$$E_\theta \tau^* \doteq \frac{L(\theta)(\ln A)^2 + (1 - L(\theta))(\ln B)^2}{E_\theta z_1^2}.$$

作为本节的末尾，我们要证明一个重要的不等式，它是 Hoeffding(1960)得到的。

设 $X_1, X_2, \cdots$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P_i)(i=0,1,2)$ 上的相互独立同分布的随机变量列，X_1 在 P_i 下的密度是 $f_i(x)$（关于某 σ 有限的测度 μ），$i=0,1,2$。假设 H_i 是：$f_i(x)$ 是 X_1 的真正分布密度($i=0,1,2$)。考虑检验问题：

$$H_1 \longleftrightarrow H_2.$$

设 $\Delta=(\tau, d)$ 是任一序贯检验法，τ 是停时，d 取值 1 或 2。"$d=1$"表示接受假设 H_1，"$d=2$"表示接受 H_2。仍记

$$\alpha = P_1(d=2), \qquad \beta = P_2(d=1).$$

定理4.5(Hoeffding)　设 $\alpha+\beta \leqslant 1$，又 $f_0(x)$ 满足：

$$\int_{\mathscr{X}} \left(\ln \frac{f_0(x)}{f_i(x)}\right)^2 f_0(x) \mu(\mathrm{d}x) < \infty \quad (i=1,2),$$

则

$$E_0 \tau \geqslant \frac{1}{C^2}\left\{\left[\left(\frac{t}{4}\right)^2 - C\ln(\alpha+\beta)\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{t}{4}\right\}, \qquad (4.15)$$

这里

$$C = \max(C_1, C_2),$$

$$C_i = \int_{\mathscr{X}} [\ln(f_0(x)/f_i(x))] f_0(x) \mathrm{d}\mu \quad (i=1,2),$$

$$t^2 = \int_{\mathscr{X}} [\ln(f_2(x)/f_1(x)) - C_1 + C_2]^2 f_0(x) \mathrm{d}\mu, \quad t>0.$$

证明　不妨设 $\alpha+\beta<1$ 且 $E_0\tau<\infty$（否则，(4.15)是显然成立的）。此时 $\tau \geqslant 1$。令

$$z_j^{(i)} = \ln[f_0(X_j)/f_i(X_j)] - E_0 \ln[f_0(X_j)/f_i(X_j)] \quad (i \geqslant 1, \ j \geqslant 1),$$

$$f_{in} \triangleq \prod_{j=1}^{n} f_i(X_j) \quad (n \geqslant 1),$$

则

$$f_{in}/f_{0n} = \exp\left\{ -\sum_{j=1}^{n} z_j^{(i)} - nC_i \right\},$$

于是

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &= \int_{(d=2)} \mathrm{d}P_1 + \int_{(d=1)} \mathrm{d}P_2 \\
&= \int_{(d=2)} (f_{1\tau}/f_{0\tau}) \mathrm{d}P_0 + \int_{(d=1)} (f_{2\tau}/f_{0\tau}) \mathrm{d}P_0 \\
&\geqslant \int_{\Omega} \min(f_{1\tau}/f_{0\tau}, f_{2\tau}/f_{0\tau}) \mathrm{d}P_0 \\
&\geqslant \int_{\Omega} \exp\left\{ -\max\left(\sum_{j=1}^{\tau} z_j^{(1)}, \sum_{j=1}^{\tau} z_j^{(2)} \right) - \tau C \right\} \mathrm{d}P_0 \\
&\geqslant \exp\left\{ -E_0 \max\left(\sum_{j=1}^{\tau} z_j^{(1)}, \sum_{j=1}^{\tau} z_j^{(2)} \right) - CE_0\tau \right\}.
\end{aligned}$$

但是

$$2\max\left(\sum_{j=1}^{\tau} z_j^{(1)}, \sum_{j=1}^{\tau} z_j^{(2)} \right) = \sum_{j=1}^{\tau} z_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{\tau} z_j^{(2)} + \left| \sum_{j=1}^{\tau} z_j^{(1)} - \sum_{j=1}^{\tau} z_j^{(2)} \right|,$$

$$E_0\left(\sum_{j=1}^{\tau} z_j^{(i)} \right) = E_0 z_1^{(i)} \cdot E_0\tau = 0 \quad (i = 1, 2),$$

$$\begin{aligned}
E_0 \left| \sum_{j=1}^{\tau} z_j^{(1)} - \sum_{j=1}^{\tau} z_j^{(2)} \right| &\leqslant \left\{ E_0\left(\sum_{j=1}^{\tau} (z_j^{(1)} - z_j^{(2)}) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= [E_0(z_1^{(1)} - z_1^{(2)})^2 \cdot E_0\tau]^{\frac{1}{2}} \\
&= t\,(E_0\tau)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

于是

$$\alpha + \beta \geqslant \exp\left\{ -\frac{t}{2}(E_0\tau)^{\frac{1}{2}} - CE_0\tau \right\},$$

从而

$$\ln(\alpha+\beta) \geqslant -\frac{t}{2}(E_0\tau)^{\frac{1}{2}} - CE_0\tau,$$

即有

$$E_0\tau + \frac{t}{2C}(E_0\tau)^{\frac{1}{2}} + C^{-1}\ln(\alpha+\beta) \geqslant 0,$$

从而

$$\left[(E_0\tau)^{\frac{1}{2}} + \frac{t}{4C}\right]^2 \geqslant \left(\frac{t}{4C}\right)^2 - \frac{1}{C}\ln(\alpha+\beta).$$

由此即可推出(4.15)成立．证毕．

§5 两个重要例子

前面介绍了 SPRT 的定义并讨论了它的基本特性，本节就贝努里分布及正态分布的情形给出具体的计算公式，并对 SPRT 的好处作些具体说明．

(1) 贝努里分布情形．

沿用例 2.1 的记号．设 $X_1, X_2, \cdots$ 是相互独立同分布的观察序列，X_1 取值 0 或 1，X_1 的分布密度(关于计数测度)是

$$f(x,p) = p^x(1-p)^{1-x} \quad (x=0,1,\ 0<p<1).$$

设假设 H_i 是"$p=p_i$" ($i=1,2$, $p_1<p_2$)．对于检验问题：

$$H_1 \longleftrightarrow H_2,$$

我们采用检验法 $S(A,B)$．从 §2 中的讨论知道，它的停时

$$\tau^* = \inf\{n:\ n \geqslant 1,\ S_n \bar{\in} (A_n, R_n)\},$$

其中

$$A_n = cn + d_2, \qquad R_n = cn + d_1,$$

c, d_1, d_2 的计算公式见 §2．当且仅当 $S_n \geqslant R_n$ 时拒绝 H_1．我们来计算 $E_p\tau^*$ 及 $L(p) \triangleq P_p$ (接受 H_1)，这里 P_p 表示真正密度是 $f(x,p)$ 时的概率测度，E_p 表示相应的数学期望符号．

由于

$$z_1 = X_1 \ln(p_2/p_1) + (1 - X_1)\ln[(1 - p_2)/(1 - p_1)],$$

从而

$$E_p z_1 = p\ln(p_2/p_1) + (1 - p)\ln[(1 - p_2)/(1 - p_1)],$$

$$E_p e^{h z_1} = (1 - p)\left(\frac{1 - p_2}{1 - p_1}\right)^h + p\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^h.$$

注意

$$P_p(z_1 > 0) \geqslant P_p(X_1 = 1) = p > 0,$$

$$P_p(z_1 < 0) \geqslant P_p(X_1 = 0) = 1 - p > 0,$$

从引理 3.6 知有 $h = h(p) \neq 0$ 满足 $E_p e^{h z_1} = 1$，即

$$(1 - p)\left(\frac{1 - p_2}{1 - p_1}\right)^{h(p)} + p\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{h(p)} = 1. \tag{5.1}$$

于是

$$L(p) \doteq \frac{B^{h(p)} - 1}{B^{h(p)} - A^{h(p)}}. \tag{5.2}$$

若 $E_p z_1 = p\ln\frac{p_2}{p_1} + (1 - p)\ln\frac{1 - p_2}{1 - p_1} \neq 0$，则

$$E_p \tau^* \doteq \frac{L(p)\ln A + (1 - L(p))\ln B}{p\ln\frac{p_2}{p_1} + (1 - p)\ln\frac{1 - p_2}{1 - p_1}}. \tag{5.3}$$

若 $E_p z_1 = 0$，$E_p z_1^2 < \infty$，则

$$E_p \tau^* \doteq \frac{L(p)(\ln A)^2 + (1 - L(p))(\ln B)^2}{p\left(\ln\frac{p_2}{p_1}\right)^2 + (1 - p)\left(\ln\frac{1 - p_2}{1 - p_1}\right)^2}. \tag{5.4}$$

以上是计算公式，下面是数值例子。例如

$$p_1 = 0.05, \quad p_2 = 0.10, \quad \alpha = \beta = 0.05.$$

对于检验问题

$$p = p_1 \longleftrightarrow p = p_2,$$

取 $A=\frac{\beta}{1-\alpha}$, $B=\frac{1-\beta}{\alpha}$，则

$$A=\frac{1}{19}, \qquad B=19.$$

经过计算知道

$$R_n=0.72n+3.94, \qquad A_n=0.72n-3.94,$$

$$L(p)\doteq\frac{19^h-1}{19^h-(19)^{-h}},$$

其中 $h=h(p)$ 满足方程

$$p=\frac{1-\left(\frac{18}{19}\right)^h}{2-\left(\frac{18}{19}\right)^h}.$$

可算出

$$E_{0.05}\tau^*\doteq159, \qquad E_{0.10}\tau^*\doteq128.$$

由此看出，SPRT 的平均样本量是相当大的，然而可以验证它比古典的固定样本量的检验法要好。记

$$n_0=\frac{1}{2}(E_{0.05}\tau^*+E_{0.10}\tau^*)\doteq144.$$

仍令 $\alpha=\beta=0.05$。我们来计算一下，为了达到同样的α,β，固定样本量方法的样本量要多大才行。这时样本量肯定很大，可用极限定理来估值。在 $p=p_1=0.05$ 的条件下，$S_n=\sum_1^n X_i$ 近似服从 $N(0.05n,\ 0.0475n)$，在 $p=p_2=0.10$ 的条件下，S_n 近似服从 $N(0.10n,0.09n)$，找 λ 满足

$$P_{0.05}\left(\frac{S_n}{n}\geqslant\lambda\right)=0.05, \qquad P_{0.01}\left(\frac{S_n}{n}<\lambda\right)=0.05,$$

显然 λ 和 n 由下式确定

$$\frac{(\lambda-0.05)\sqrt{n}}{\sqrt{0.0475}}=1.65, \quad \frac{(\lambda-0.10)\sqrt{n}}{\sqrt{0.09}}=-1.65.$$

由此知

$$n\doteq 292, \quad \lambda\doteq 0.072, \quad \lambda n\doteq 21,$$

故 $S_{292}\geqslant 21$ 时拒绝 H_1: $p=p_1$; $S_{292}<21$ 时接受 H_1。这时两类错误的概率都是 0.05，但样本量却是 SPRT 的平均样本量的二倍。

(2) 正态分布情形。

沿用例 2.2 的记号。设 $X_1,X_2,\cdots$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P_\theta)$ 上相互独立同分布的观察序列，$X_1\sim N(\theta,1)$，这里 $\theta\in(-\infty,\infty)$。给定 $\theta_1<\theta_2$，假设 H_i 是"$\theta=\theta_i$"$(i=1,2)$。对于检验问题：

$$\theta=\theta_1\longleftrightarrow\theta=\theta_2,$$

用检验法 $S(A,B)$。我们来计算 $L(\theta)=P_\theta$(接受假设H_1)和 $E_\theta\tau^*$，这里

$$\tau^*=\inf\left\{n:\ n\geqslant 1,\ S_n\overline{\in}\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}n+c,\ \frac{\theta_1+\theta_2}{2}n+d\right)\right\}.$$

其中

$$c=(\ln A)/(\theta_2-\theta_1), \quad d=(\ln B)/(\theta_2-\theta_1).$$

注意

$$z_1\triangleq\ln[f(X_1,\theta_2)/f(X_1,\theta_1)],$$

这里

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2\right\}.$$

易知

$$z_1=(\theta_2-\theta_1)X_1+\frac{1}{2}(\theta_1^2-\theta_2^2).$$

经过计算知道

$$E_\theta e^{hz_1}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{hx}f(x,\theta)\mathrm{d}x$$

$$= \exp\left\{ \frac{h}{2}(\theta_2 - \theta_1)[2\theta + h(\theta_2 - \theta_1) - (\theta_1 + \theta_2)] \right\}.$$

可见，当 $h = h(\theta) = \dfrac{\theta_1 + \theta_2 - 2\theta}{\theta_2 - \theta_1}$时，

$$E_\theta e^{h z_1} = 1.$$

从定理 4.5 知，只要 $\theta \neq \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$，则

$$L(\theta) \approx \frac{B^{h(\theta)} - 1}{B^{h(\theta)} - A^{h(\theta)}}.$$

当 $\theta = \theta_0 = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$时，利用连续性① 知

$$L(\theta_0) \approx \lim_{\theta \to \theta_0} \frac{B^{h(\theta)} - 1}{B^{h(\theta)} - A^{h(\theta)}} = \frac{\ln B}{\ln B - \ln A}.$$

当 $\theta \neq \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$时，$E_\theta z_1 \neq 0$，故

$$E_\theta \tau^* \approx \frac{L(\theta)\ln A + (1 - L(\theta))\ln B}{(\theta_2 - \theta_1)\theta + \frac{1}{2}(\theta_1^2 - \theta_2^2)}. \tag{5.5}$$

---

① 我们可以证明 $L(\theta) = P_\theta$（接受 H_1）在 $\theta = \theta_0$ 时是连续的。实际上，$L(\theta) = P_\theta\ (Z_{\tau^*} \leqslant \ln A)$

$$= \int_{\{Z_{\tau^*} \leqslant \ln A\}} \exp\left\{ \frac{\theta - \theta_0}{\theta_2 - \theta_1} Z_{\tau^*} + \frac{1}{2}\tau^*(\theta - \theta_0)(\theta_1 + \theta_2 + \theta_0 - \theta) \right\} dP_{\theta_0},$$

只要 λ足够小，$E_{\theta_0} e^{\lambda \tau^*} < \infty$，故利用控制收敛定理知

$$\lim_{\theta \to \theta_0 +} L(\theta) = P_{\theta_0}(Z_{\tau^*} \leqslant \ln A) = L(\theta_0).$$

另一方面，

$$1 - L(\theta) = \int_{\{Z_{\tau^*} \geqslant \ln B\}} \exp\left\{ \frac{\theta - \theta_0}{\theta_2 - \theta_1} Z_{\tau^*} + \frac{1}{2}\tau^*(\theta - \theta_0)(\theta_1 + \theta_2 + \theta_0 - \theta) \right\} dP_{\theta_0},$$

利用控制收敛定理知 $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} 1 - L(\theta) = P_{\theta_0}(Z_{\tau^*} \geqslant \ln B) = 1 - L(\theta_0)$。这就证明了 $L(\theta)$ 在 $\theta = \theta_0$ 是连续的。

当 $\theta = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$时，

$$E_\theta z_1 = 0, \qquad E_\theta z_1^2 = (\theta_2-\theta_1)^2,$$

$$E_\theta Z_{\tau^*}^2 \doteq L(\theta)(\ln A)^2 + (1-L(\theta))(\ln B)^2 = -(\ln A)\ln B.$$

于是有

$$E_\theta \tau^* \doteq \frac{-(\ln A)\ln B}{(\theta_2-\theta_1)^2}. \tag{5.6}$$

取 $A = \frac{\beta}{1-\alpha}$， $\beta = \frac{1-\beta}{\alpha}$ ，从(5.5)可以得到

$$E_{\theta_2}\tau^* \doteq \frac{\beta\ln(\beta/1-\alpha)+(1-\beta)\ln(1-\beta)/\alpha)}{\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)^2}, \tag{5.7}$$

$$E_{\theta_1}\tau^* \doteq \frac{(1-\alpha)\ln(\beta/1-\alpha)+\alpha\ln((1-\beta)/\alpha)}{-\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)^2}. \tag{5.8}$$

下面我们比较 SPRT 和固定样本量检验法，以显示前者在节约样本量方面的好处。

根据 Neyman-Pearson 理论，最优的固定样本量检验是这样的：当 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i > c$ 时拒绝假设 H_1: $\theta=\theta_1$； 当 $\overline{X} \leqslant c$ 时接受 H_1。这里的 n 和 c 应这样选取，使得对于给定的 α,β 满足：

$$P_{\theta_1}(\overline{X}>c) = \alpha, \qquad P_{\theta_2}(\overline{X}\leqslant c) = \beta. \tag{5.9}$$

在假设 H_i 下，$\overline{X} \sim N\left(\theta_i, \frac{1}{n}\right)$ $(i=1,2)$。记 k_λ 为 $N(0,1)$ 分布的 $1-\lambda$ 分位点$(0<\lambda<1)$，即有

$$\int_{k_\lambda}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \lambda.$$

从(5.9)知

$$(c-\theta_1)\sqrt{n}=k_\alpha, \qquad (c-\theta_2)\sqrt{n}=k_{1-\beta},$$

于是

$$n \doteq \frac{(k_\alpha-k_{1-\beta})^2}{(\theta_2-\theta_1)^2}, \qquad c=\theta_1+\frac{(\theta_2-\theta_1)k_\alpha}{|k_\alpha-k_{1-\beta}|}.$$

取 $A=\frac{\beta}{1-\alpha}$; $B=\frac{1-\beta}{\alpha}$，则 $S(A,B)$的两类错误的概率近似地等于 α,β。仍记 τ^* 为 $S(A,B)$之停时，令

$$\mu_i=\frac{1}{n}E_{\theta_i}\tau^* \quad (i=1,2).$$

从(5.7)和(5.8)知

$$\mu_1\approx -2\frac{\alpha\ln\frac{1-\beta}{\alpha}+(1-\alpha)\ln\frac{\beta}{1-\alpha}}{(k_\alpha-k_{1-\beta})^2},$$

$$\mu_2\approx 2\frac{(1-\beta)\ln\frac{1-\beta}{\alpha}+\beta\ln\frac{\beta}{1-\alpha}}{(k_\alpha-k_{1-\beta})^2}.$$

对于常用的几个 α,β，表 5.1 和表 5.2 列出了 $100\mu_1$ 和$100\mu_2$ 的值。

表5.1　$100\mu_1$

β	α			
	0.01	0.03	0.05	0.10
0.01	41.5	48.8	52.5	56.4
0.03	38.4	46.2	50.5	55.7
0.05	36.6	44.7	49.2	55.2
0.10	33.1	41.4	46.4	53.7

表5.2　$100\mu_2$

β	α			
	0.01	0.03	0.05	0.10
0.01	41.5	38.4	36.6	33.1
0.03	48.8	46.2	44.7	41.4
0.05	52.5	50.5	49.2	46.4
0.10	56.4	53.7	46.2	53.7

从这两张表可以看出，SPRT 所需要的平均样本量比固定样本量的最优检验的样本量要小得多，使用前者平均可节省样本量一半左右。

例5.1　设 $X_1 \sim N(\theta,1)$，H_1：$\theta=0$，H_2：$\theta=1$，$\alpha=\beta=0.01$。取

$$A=\frac{\beta}{1-\alpha}=\frac{1}{99},\qquad B=\frac{1-\beta}{\alpha}=99,$$

这里 $z_1=X_1-\frac{1}{2}$，

$$E_0 z_1=-\frac{1}{2},\qquad E_1 z_1=\frac{1}{2},$$

$$E_0\tau^* \doteq \frac{0.99\ln(99)^{-1}+0.01\ln 99}{-\frac{1}{2}} \doteq 9,$$

$$E_1\tau^* \doteq \frac{0.01\ln(99)^{-1}+0.99\ln 99}{\frac{1}{2}} \doteq 9.$$

若采用固定样本量情形的最优检验法，则应取 $n \doteq (k_{0.01}-k_{0.99})^2$，查正态分布表知

$$k_{0.01}=2.33,\quad k_{0.99}=-2.33,$$

于是 $n\doteq22$。

可见 SPRT 所需的平均样本量是非序贯情形最优检验法的样本量的 41%.

§6 SPRT的特征量的精细估计

刻画 SPRT 的特性的量是：施行特性函数(即接受零假设的概率)与平均样本量. 对这两个量我们都给出了近似公式. 读者可能很不满足，这些近似公式的误差有多大？能否给出一些不等式，说明这两个特征量准确地在什么范围内？本节正是回答这样的问题. 我们先对随机游动进行精细的研究，找出若干有用的不等式，然后用到统计问题上去. 对贝努里分布和正态分布的情形我们给出了计算结果。

设$z_1,z_2,\cdots$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上独立同分布的随机变量列，z_1的分布函数是 $F(z)$，$P(z_1=0)<1$，$Z_n=\sum\limits_{1}^{n}z_i$ $(n\geqslant1)$，$-\infty<a<0<b<\infty$。令

$$\tau=\inf\{n:\ n\geqslant1,\ Z_n\bar{\in}(a,b)\}.$$

这个 τ 就是以前的 τ^*，为简化记号，用 τ 表示.

我们最关心两个量：$L\triangleq P(Z_\tau\leqslant a)$及 $E\tau$. 本节给出这两个量的精细估计。

定理6.1 设有 $h\neq0$ 满足

$$Ee^{hz_1}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{hz}dF(z)=1,$$

则有下列不等式：

① $$\frac{e^{hb}-1}{e^{hb}-\eta e^{ha}}\leqslant L\leqslant\frac{\delta e^{hb}-1}{\delta e^{hb}-e^{ha}}\quad(h>0),$$

② $$\frac{1-e^{hb}}{\delta e^{ha}-e^{hb}}\leqslant L\leqslant\frac{1-\eta e^{hb}}{e^{ha}-\eta e^{hb}}\quad(h<0),$$

其中

$$\eta=\inf_{\zeta>1}\frac{\zeta\int_{e^{hz}>\zeta^{-1}} e^{hz}\mathrm{d}F(z)}{\int_{e^{hz}<\zeta^{-1}} \mathrm{d}F(z)},\text{①} \tag{6.1}$$

$$\delta=\sup_{0<\rho<1}\frac{\rho\int_{e^{hz}\geqslant\rho^{-1}} e^{hz}\mathrm{d}F(z)}{\int_{e^{hz}\geqslant\rho^{-1}} \mathrm{d}F(z)}. \tag{6.2}$$

为了证明这个定理，先证两个引理。

引理6.1 设随机向量 U,V 相互独立，$\varphi(x,y)$是 Borel 可测函数，$E(\varphi(U,V))$存在，则概率为一地成立：

$$E\{\varphi(U,V)\,|\,U\}=[E\varphi(x,V)]|_{x=U}. \tag{6.3}$$

证明 设 A,B 是 Borel 集，I_A,I_B 是 A,B 之示性函数。当 $\varphi(x,y)=I_A(x)I_B(y)$时，直接计算知(6.1)成立。利用测度论中的标准推理(参看王梓坤的书(1965)的附篇引理 4)知，对一般的 Borel 可测函数 $\varphi(x,y)$，(6.3)也是成立的。证毕。

引理6.2 设 $\varphi(x)$ Borel 可测，$E\varphi(Z_\tau)>-\infty$，则有下列不等式：

$$\int_{(Z_\tau\leqslant a)}\varphi(Z_\tau)\mathrm{d}P\geqslant\lambda P(Z_\tau\leqslant a), \tag{6.4}$$

$$\int_{(Z_\tau\leqslant a)}\varphi(Z_\tau)\mathrm{d}P\leqslant\lambda^* P(Z_\tau\leqslant a), \tag{6.5}$$

$$\int_{(Z_\tau\geqslant b)}\varphi(Z_\tau)\mathrm{d}P\leqslant\mu P(Z_\tau\geqslant b), \tag{6.6}$$

---

① 这里及下面碰到分式时，总假定分母不为 0，在取下确界(上确界)时，使得分式的分母等于 0 的参数不包括在内。

$$\int_{\{Z_\tau \geqslant b\}} \varphi(Z_\tau)\mathrm{d}P \geqslant \mu^* P(Z_\tau \geqslant b), \tag{6.7}$$

这里 $\lambda,\lambda^*,\mu,\mu^*$ 的定义如下：

$$\lambda = \inf_{\gamma \in (0, b-a)} \frac{\int_{z \leqslant -\gamma} \varphi(a+\gamma+z)\mathrm{d}F(z)}{\int_{z \leqslant -\gamma} \mathrm{d}F(z)}, \tag{6.8}$$

$$\lambda^* = \sup_{\gamma \in (0, b-a)} \frac{\int_{z \leqslant -\gamma} \varphi(a+\gamma+z)\mathrm{d}F(z)}{\int_{z \leqslant -\gamma} \mathrm{d}F(z)}, \tag{6.9}$$

$$\mu = \sup_{\gamma \in (0, b-a)} \frac{\int_{z \geqslant \gamma} \varphi(b-\gamma+z)\mathrm{d}F(z)}{\int_{z \geqslant \gamma} \mathrm{d}F(z)}, \tag{6.10}$$

$$\mu^* = \inf_{\gamma \in (0, b-a)} \frac{\int_{z \geqslant \gamma} \varphi(b-\gamma+z)\mathrm{d}F(z)}{\int_{z \geqslant \gamma} \mathrm{d}F(z)}. \tag{6.11}$$

证明

$$\int_{\{\substack{\tau = k \\ Z_k \leqslant a}\}} \varphi(Z_\tau)\mathrm{d}P$$

$$= \int_\Omega \prod_{i=1}^{k-1} I_{(a,b)}(Z_i) \cdot I_{(-\infty, a-Z_{k-1})}(z_k)$$

$$\cdot \varphi(Z_{k-1}+z_k)\mathrm{d}P$$

$$= \int_\Omega E\left\{\prod_{i=1}^{k-1} I_{(a,b)}(Z_i) I_{(-\infty, a-Z_{k-1})}(z_k)\right.$$

$$\cdot \varphi(Z_{k-1}+z_k)\Big|Z_1,\cdots,Z_{k-1}\Big\}\mathrm{d}P$$

$$=\int_\Omega\Big[\prod_{i=1}^{k-1}I_{(a,b)}(u_i)\int_{z\leqslant a-u_{k-1}}\varphi(u_{k-1}+z)$$

$$\cdot \mathrm{d}F(z)\Big]\Big|_{u_1=Z_1,\cdots,u_{k-1}=Z_{k-1}}\mathrm{d}P$$

$$=\int_\Omega\prod_{i=1}^{k-1}I_{(a,b)}(Z_i)$$

$$\cdot\int_{z\leqslant-(Z_{k-1}-a)}\varphi(a+Z_{k-1}-a+z)\mathrm{d}F(z)\mathrm{d}P$$

$$\geqslant\int_\Omega\prod_{i=1}^{k-1}I_{(a,b)}(Z_i)\lambda\int_{z\leqslant-(Z_{k-1}-a)}\mathrm{d}F(z)\mathrm{d}P.$$

在上面的推理中若取 $\varphi(x)\equiv1$，则知

$$\int_{\{\tau=k \atop Z_k\leqslant a\}}\mathrm{d}P=\int_\Omega\prod_{i=1}^{k-1}I_{(a,b)}(z_i)\int_{z\leqslant-(Z_{k-1}-a)}\mathrm{d}F(z)\mathrm{d}P.$$

于是对任意的 φ，有

$$\int_{\{\tau=k \atop Z_k\leqslant a\}}\varphi(Z_\tau)\mathrm{d}P\geqslant\lambda\int_{\{\tau=k \atop Z_k\leqslant a\}}\mathrm{d}P.$$

此式两边对 k 求和就得到了(6.4)。

可用类似方法证明(6.5)，(6.6)，(6.7)成立。证毕。

定理 6.1 的证明 我们考虑 $h>0$ 的情形。令 $\varphi(x)=e^{hx}$，从(6.4)和(6.6)知

$$\int_{\{Z_\tau\leqslant a\}}e^{hZ_\tau}\mathrm{d}P\geqslant\lambda P(Z_\tau\leqslant a),$$

$$\int_{\{Z_\tau\geqslant b\}}e^{hZ_\tau}\mathrm{d}P\leqslant\mu P(Z_\tau\geqslant b),$$

这里

$$\lambda = \inf_{\gamma \in (0, b-a)} \left\{ e^{h(a+\gamma)} \int_{z \leqslant -\gamma} e^{hz} dF(z) \Big/ \int_{z \leqslant -\gamma} dF(z) \right\}$$

$\geqslant e^{ha}\eta$ (η 之定义见(6.1)),

$$\mu = \sup_{\gamma \in (0, b-a)} \left[e^{h(b-\gamma)} \int_{z \geqslant \gamma} e^{hz} dF(z) \Big/ \int_{z \geqslant \gamma} e^{hz} dF(z) \right]$$

$\leqslant e^{hb} \cdot \delta$ (δ 之定义见(6.2)).

于是

$$\int_{\{Z_\tau \leqslant a\}} e^{hZ_\tau} dP \geqslant e^{ha}\eta P(Z_\tau \leqslant a),$$

$$\int_{\{Z_\tau \geqslant b\}} e^{hZ_\tau} dP \leqslant e^{hb}\delta P(Z_\tau \geqslant b).$$

利用序贯分析的基本恒等式知

$$\begin{aligned} 1 = Ee^{hZ_\tau} &\geqslant e^{ha}\eta P(Z_\tau \leqslant a) + e^{hb} P(Z_\tau \geqslant b) \\ &= e^{ha}\eta L + e^{hb}(1-L), \end{aligned}$$

于是

$$L \geqslant (e^{hb} - 1)/(e^{hb} - \eta e^{ha}).$$

另一方面,

$$\begin{aligned} 1 = Ee^{hZ_\tau} &\leqslant e^{ha} P(Z_\tau \leqslant a) + e^{hb}\delta P(Z_\tau \geqslant b) \\ &= e^{ha} L + e^{hb}\delta(1-L), \end{aligned}$$

于是

$$L \leqslant (\delta e^{hb} - 1)/(\delta e^{hb} - e^{ha}).$$

这就证明了定理 6.1 的①成立。②的证明是完全类似的，从略。证毕。

为了得到 $E\tau$ 的估计式，需要估计 EZ_τ 及 EZ_τ^2.

定理 6.2

$$EZ_\tau \geqslant L(a + \xi') + (1-L)b, \tag{6.12}$$

$$EZ_\tau \leqslant La + (1-L)(b+\xi), \tag{6.13}$$

$$EZ_\tau^2 \geqslant La^2 + (1-L)b^2, \tag{6.14}$$

$$EZ_\tau^2 \leqslant L(a^2 + 2\xi' a + \zeta') + (1-L)(b^2 + 2\xi b + \zeta), \tag{6.15}$$

这里 ξ,ξ',ζ,ζ' 的定义如下：

$$\xi = \sup_{\gamma>0}\left[\int_{z>\gamma}(z-\gamma)\mathrm{d}F(z) \Big/ \int_{z>\gamma}\mathrm{d}F(z)\right],$$

$$\xi' = \inf_{\gamma>0}\left[\int_{z<-\gamma}(z+\gamma)\mathrm{d}F(z) \Big/ \int_{z<-\gamma}\mathrm{d}F(z)\right],$$

$$\zeta = \sup_{\gamma>0}\left[\int_{(z>\gamma)}(z-\gamma)^2\mathrm{d}F(z) \Big/ \int_{z>\gamma}\mathrm{d}F(z)\right],$$

$$\zeta' = \sup_{\gamma>0}\left[\int_{z<-\gamma}(z+\gamma)^2\mathrm{d}F(z) \Big/ \int_{z<-\gamma}\mathrm{d}F(z)\right].$$

证明 取 $\varphi(x)=x$。从(6.8)知 $\lambda \geqslant a+\xi'$，于是

$$\begin{aligned} EZ_\tau &\geqslant (a+\xi')P(Z_\tau \leqslant a) + bP(Z_\tau \geqslant b) \\ &= (a+\xi')L + b(1-L), \end{aligned}$$

这就证明了(6.12)成立．用类似方法可证明(6.13)成立。取 $\varphi(x) = x^2$，从(6.9)知

$$\lambda^* \leqslant a^2 + 2a\xi' + \zeta', \qquad \mu \leqslant b^2 + 2b\xi + \zeta,$$

于是

$$\int_{\{Z_\tau \leqslant a\}} Z_\tau^2 \mathrm{d}P \leqslant L(a^2 + 2a\xi' + \zeta'),$$

$$\int_{Z_\tau \geqslant b} Z_\tau^2 \mathrm{d}P \leqslant (1-L)\cdot(b^2 + 2b\xi + \zeta).$$

这就证明(6.15)成立。由于 $a<0<b$，当然有(6.14)成立，证毕。

当 $Ez_1 \neq 0$ 时，$E\tau = \frac{1}{Ez_1}EZ_\tau$； 当 $Ez_1 = 0$，$Ez_1^2 < \infty$ 时，

$E\tau = \frac{1}{Ez_1} EZ_\tau^2$。利用定理6.2可得到$E\tau$的准确范围。在实际使用时，需要计算出$\eta,\delta,\xi,\xi'$等的值，这不是件容易的事。幸运的是，对于贝努里分布和正态分布的情形，这几个量可以算出来，而且得到的表达式极为简单。

(1) 贝努里分布情形。

沿用§5中的记号，设X_1服从贝努里分布，参数$p\in(0,1)$。给定$p_1<p_2$，考虑检验问题：

$$H_1:\ p=p_1 \longleftrightarrow H_2:\ p=p_2。$$

为了估计$L=L(p)$及$E_p\tau$，可用定理6.1及6.2，其中$L=L(p)=P_p$(接受H_1)，$E=E_p$。记$q_i=1-p_i(i=1,2)$，经过不复杂的计算可得下列结果：

$$\eta=\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^h,\quad \delta=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^h\quad (h>0),$$

$$\eta=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^h,\quad \delta=\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^h\quad (h<0),$$

$$\xi=\ln\frac{p_2}{p_1},\qquad \xi'=\ln\frac{q_2}{q_1},$$

其中$h=h(p)$满足下式：

$$p\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{h(p)}+(1-p)\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{h(p)}=1。$$

(2) 正态分布情形。

沿用§5中的记号，设$X_1\sim N(\theta,1)$，这里$\theta\in(-\infty,\infty)$。给定$\theta_1<\theta_2$，考虑检验问题：

$$H_1:\ \theta=\theta_1 \longleftrightarrow H_2:\ \theta=\theta_2。$$

为了估计$L=L(\theta)$及$E_\theta\tau$，可用定理6.1及6.2。注意$L(\theta)=P_\theta$(接受H_1)，$E=E_\theta$。经过相当复杂的计算，可得下列重要

结果：

$$\eta = \frac{1}{\delta} = \frac{G(\lambda)}{G(-\lambda)},$$

$$\xi = u\left[\frac{\varphi(-t)}{G(-t)} + t\right],$$

$$\xi' = u\left[t - \frac{\varphi(t)}{G(t)}\right],$$

其中

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad G(x) = \int_x^{\infty}\varphi(s)\mathrm{d}s,$$

$$t = \theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad \lambda = |t|, \quad u = \theta_2 - \theta_1 \text{①}.$$

§7 SPRT 的最优性

本节要给出 SPRT 的最优性的严格而完全的证明，还要证明：在一定意义下不存在与 SPRT 同样好的其它检验。在证明最优性时，我们使用 Lorden (1980)的方法，将问题变成可用最优停止理论处理的形式。

(1) 一个辅助问题。

设 $X_1, X_2, \cdots$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P_i)$ $(i=0,1,2)$ 上的相互独立同分布的随机变量(随机元)列，X_i 取值于可测空间 $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$。$X_i$ 在 P_i 下的分布密度是 $f_i(x)$(关于某 σ 有限测度 μ)，且 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是不同的，即

$$\mu\{x: f_1(x) \neq f_2(x)\} > 0.$$

① 在计算过程中要利用下列事实：若 $\gamma(x) = \frac{\varphi(x)}{G(x)}$，则 $\gamma'(x) \leqslant 1$，从而可以证明 $e^{\alpha t}\frac{G(t+\alpha)}{G(t)}$ 是 t 的增函数(一切 $\alpha > 0$)。

假设 H_i 是"$f_i(x)$是 X_1 的真正的分布密度"$(i=0,1,2)$。对于检验问题 $H_1\longleftrightarrow H_2$，采用序贯检验法，即 τ 是停时，d 是 $(\Omega_\tau,\mathscr{F}_\tau)$上取值于$\{1,2\}$的可测映射，这里 $\Omega_\tau=\{\tau<\infty\}$，$\mathscr{F}_\tau$ 的定义见§2。"$d=1$"表示接受假设 H_1，"$d=2$"表示接受H_2。

记

$$\alpha=P_1(d=2),\quad \beta=P_2(d=1).$$

我们的辅助问题是：对于给定的 $u\geqslant 0$，$v\geqslant 0$，寻找检验法(τ,d)使 $E_0\tau-u\alpha+v\beta$ 达到最小值，这里 E_i 表示关于 P_i 的数学期望。

我们将这个问题化为最优停止问题。

令

$$f_{in}=\prod_{j=1}^{n}f_i(X_j)\quad(i=0,1,2;\ n\geqslant 1),$$

$$f_{i0}=1,$$

$$U_n=uf_{1n}/f_{0n}\quad(n\geqslant 0),$$

$$V_n=vf_{2n}/f_{0n}\quad(n\geqslant 0).$$

定义 称检验法(τ,d)是正则的，若

$$d=\begin{cases}1, & \text{当 }\tau<\infty\text{ 且}U_\tau\geqslant V_\tau,\\ 2, & \text{当 }\tau<\infty\text{ 且}U_\tau<V_\tau.\end{cases}$$

对任何检验法(τ,d)，令

$$\tilde{\tau}=\begin{cases}\tau, & \text{当 }\tau<\infty\text{ 且 }f_{0\tau}>0,\\ \infty, & \text{否则}.\end{cases}$$

$$\tilde{d}=\begin{cases}1, & \text{当 }\tilde{\tau}<\infty\text{ 且}U_{\tilde{\tau}}\geqslant V_{\tilde{\tau}},\\ 2, & \text{当 }\tilde{\tau}<\infty\text{ 且}U_{\tilde{\tau}}<V_{\tilde{\tau}}.\end{cases}$$

易知$(\tilde{\tau},\tilde{d})$是正则的，

$$P_0(\tilde{\tau}\neq\tau)=P_0(\tau<\infty,f_{0\tau}=0)=0.$$

故 $E_0\tilde{\tau}=E_0\tau$。

$$\tilde{\alpha}\triangleq P_1(\tilde{d}=2)=P_1(\tilde{\tau}<\infty,U_{\tilde{\tau}}<V_{\tilde{\tau}})$$

$$\leqslant P_1(\tau<\infty, U_\tau<V_\tau)$$

$$=\int_{\{U_\tau<V_\tau\}}\frac{f_{1\tau}}{f_{0\tau}}\mathrm{d}P_0.$$

类似地

$$\tilde{\beta}\triangleq P_2(\tilde{d}=1)=P_2(\tilde{\tau}<\infty, U_{\tilde{\tau}}\geqslant V_{\tilde{\tau}})$$

$$\leqslant P_2(\tau<\infty, U_\tau\geqslant V_\tau)$$

$$=\int_{\{U_\tau\geqslant V_\tau\}}\frac{f_{2\tau}}{f_{0\tau}}\mathrm{d}P_0.$$

于是

$$u\tilde{\alpha}+v\tilde{\beta}\leqslant\int_{\{\tau<\infty\}}\min(U_\tau, V_\tau)\mathrm{d}P_0.$$

但是

$$\alpha=P_1(d=2)=\int_{\{d=2\}}\frac{f_{1\tau}}{f_{0\tau}}\mathrm{d}P_0,$$

$$\beta=P_2(d=1)=\int_{\{d=1\}}\frac{f_{2\tau}}{f_{0\tau}}\mathrm{d}P_0,$$

故

$$u\alpha+v\beta\geqslant\int_{\{\tau<\infty\}}\min(U_\tau, V_\tau)\mathrm{d}P_0.$$

从而

$$E_0\tilde{\tau}+u\tilde{\alpha}+v\tilde{\beta}\leqslant E_0\tau+u\alpha+v\beta.$$

这表明，只须从全体正则检验中寻找 τ, d 使 $E_0\tau+u\alpha+v\beta$ 达到最小值。易知，若(τ, d)是正则的，则

$$u\alpha+v\beta=\int_{\{\tau<\infty\}}\min(U_\tau, V_\tau)\mathrm{d}P_0.$$

故辅助问题化为：寻找停时 τ，使得 $E_0(\tau+\min(U_\tau, V_\tau))$达到最小值。

我们利用第一章的理论来解决这个问题。记

$$z_n=(U_n,V_n)\quad(n\geqslant 0),$$

$$\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\},\quad \mathscr{F}_n=\sigma(X_1,\cdots,X_n)\quad(n\geqslant 1).$$

我们指出$(z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$是$(\Omega,\mathscr{F},P_0)$上的齐次马氏链。

实际上，

$$U_n=U_{n-1}\frac{f_1(X_n)}{f_0(X_n)},\quad V_n=V_{n-1}\frac{f_2(X_n)}{f_0(X_n)},$$

从引理 6.1 知

$$P_0\{(U_n,V_n)\in A\times B\mid X_1,\cdots,X_{n-1}\}$$

$$=P_0\left(\left(s\frac{f_1(X_n)}{f_0(X_n)},t\frac{f_2(X_n)}{f_0(X_n)}\right)\right.$$

$$\left.\in A\times B\right)\Big|_{s=U_{n-1},\ t=V_{n-1}}\quad(\text{a.s.}P_0)$$

$$=P_0((U_n,V_n)\in A\times B\mid U_{n-1},V_{n-1})\quad(\text{a.s.}P_0).$$

故$(z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$是齐次马氏链，其转移函数是

$$P((s,t),H)=P_0\left\{\left(s\frac{f_1(X_1)}{f_0(X_1)},t\frac{f_2(X_1)}{f_0(X_1)}\right)\in H\right\}.$$

利用测度论方法，不难验证：当H是二维 Borel 集时，$P((s,t),H)$是s,t的二元 Borel 函数。注意$(U_0,V_0)=(u,v)$，所以$\{(U_n,V_n),n\geqslant 0\}$是从$(u,v)$出发之马氏链，此链之相空间是

$$Z=\{(s,t):\ s\geqslant 0,t\geqslant 0\}.$$

令

$$g(z)=g(s,t)=-\min(s,t),$$

$$y_n=g(z_n)-n.$$

研究$(y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$之最优停止问题。注意$y_n\leqslant 0$。最优停时是存在的。令

$$V_0(u,v)=\sup_{\tau\geqslant 0}E_0y_\tau\qquad(\tau\text{ 是停时，下同}),$$

$$V_1(u,v)=\sup_{\tau\geq 1} E_0 y_\tau,$$

$$R_0(u,v)=\inf_{\tau\geq 0} E_0[\tau+\min(U_\tau,V_\tau)],$$

$$R_1(u,v)=\inf_{\tau\geq 1} E_0[\tau+\min(U_\tau,V_\tau)].$$

当然

$$R_0(u,v)=-V_0(u,v),$$

$$R_1(u,v)=-V_1(u,v),$$

$$R_0(u,v)=\min(u,v,R_1(u,v)).$$

从第一章定理 8.4 知，为了停时 τ 是最优的，必须只须对一切 $n\geq 0$，有

$$R_0(U_n,V_n)=\begin{cases}\min(U_n,V_n), & \text{当 } \tau=n,\\ R_1(U_n,V_n), & \text{当 } \tau>n.\end{cases} \tag{7.1}$$

这里“相等”允许例外集是零概率的(关于 P_0)。特别

$$\sigma\triangleq\inf\{n:\ n\geq 0, R_0(U_n,V_n)=\min(U_n,V_n)\}$$

是最优停时．显然

$$\sigma=\inf\{n:\ n\geq 0, U_n\leq R_1(U_n,V_n)\text{ 或 } V_n\leq R_1(U_n,V_n)\}.$$

下面对集合

$$\{(u,v):\ u\geq 0, v\geq 0, u\leq R_1(u,v)\}$$

及

$$\{(u,v):\ u\geq 0, v\geq 0, v\leq R_1(u,v)\}$$

的特性进行研究．

设 $u\geq 0$，$v\geq 0$，令

$$U(v)\triangleq\inf\{u:\ u\geq 0, R_1(u,v)-u=0\},$$

$$V(u)\triangleq\inf\{v:\ v\geq 0, R_1(u,v)-v=0\}.$$

定理 7.1 (1) 对任何 $v\geq 0$，$U(v)$是函数

$$\varphi(u)\triangleq R_1(u,v)-u$$

的唯一零点，且

$$\operatorname{sgn}(R_1(u,v)-u)=\operatorname{sgn}(U(v)-u), \tag{7.2}$$

这里 $\operatorname{sgn} x$ 是符号函数：$x>0$ 时，$\operatorname{sgn} x=1$；$x<0$ 时，$\operatorname{sgn} x=-1$；

$\mathrm{sgn}0 = 0$。

(2) 对任何 $u \geqslant 0$、$V(u)$是函数

$$\psi(v) \triangleq R_1(u,v) - v$$

的唯一零点，且

$$\mathrm{sgn}(R_1(u,v) - v) = \mathrm{sgn}(V(u) - v)。\qquad (7.3)$$

(3) $U(\cdot)$, $V(\cdot)$都是正的不减的连续凹函数。

证明

$\varphi(u) = \inf\{E_0\tau + u(\alpha - 1) + v\beta$：$(\tau,d)$是检验法且 $\tau \geqslant 1\}$，
但是线性函数族的"下确界"一定是凹函数，局部有界的凹函数一定连续，故 $\varphi(u)$是连续凹函数。显然 $\varphi(0) \geqslant 1$。取 $\tau = 1$，$d = 1$，则 $\alpha = 0$，$\beta = 1$。于是

$$\varphi(u) \leqslant 1 - u + v,$$

故 u 充分大时 $\varphi(u) < 0$。所以有 $u_0 > 0$ 满足 $\varphi(u_0) = 0$。由于 $\varphi(\cdot)$是凹函数，零点只有一个，$u_0 = U(v)$且(7.2)成立。

现在来证明 $U(\cdot)$是凹函数。以下 u, v 均是非负的。注意

$$\{(u,v):\ u \leqslant V(v)\} = \{(u,v):\ u \leqslant R_1(u,v)\}$$

$$= \bigcap_{(\tau,d)} \{(u,v):\ u(1-\alpha) \leqslant E_0\tau + v\beta\},$$

这里(τ,d)是任意的序贯检验，$\tau \geqslant 1$，α, β 是相应的两类错误的概率。直接验证知

$$\{(u,v):\ u(1-\alpha) \leqslant E_0\tau + v\beta\}$$

是凸集，故

$$\{(u,v):\ u \leqslant U(v)\}$$

是凸集。我们说由此可推知 $U(\cdot)$是凹函数。实际上，任给定 $v_1 < v_2$，$0 < \lambda < 1$，因为

$$(U(v_i), v_i) \in \{(u,v):\ u \leqslant U(v)\}\quad (i = 1,2),$$

故

$$\lambda(U(v_1), v_1) + (1-\lambda)(U(v_2), v_2) \in \{(u,v):\ u \leqslant U(v)\},$$

所以

$$\lambda U(v_1)+(1-\lambda)U(v_2)\leqslant U(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2).$$

这表明$U(\cdot)$是凹函数。

任意给定$v_1<v_2$，令$u_0=U(v_1)$。因为

$$(u_0,v_1)\in\{(u,v):\ u\leqslant U(v)\},$$

故对一切检验法$(\tau,d)(\tau\geqslant 1)$，$u_0(1-\alpha)\leqslant E_0\tau+v_1\beta$，从而

$$u_0(1-\alpha)\leqslant E_0\tau+v_2\beta,$$

于是

$$(u_0,v_2)\in\{(u,v):\ u\leqslant U(v)\},$$

从而$U(v_2)\geqslant u_0=U(v_1)$。这表明$U(\cdot)$是不减的。不减的凹函数当然连续。

同理可证有关$V(\cdot)$的各项结论。证毕。

定理 7.2 （1）当$\int_{\mathscr{X}}f_0\ \ln\frac{f_2}{f_1}\mathrm{d}\mu>0$时，$U(\cdot)$是有界的；当$\int_{\mathscr{X}}f_0\ \ln\frac{f_2}{f_1}\mathrm{d}\mu<0$时，$V(\cdot)$是有界的。

（2）当$\int_{\mathscr{X}}f_0\ \ln\frac{f_2}{f_1}\mathrm{d}\mu=0$时，存在$w_0>0$满足：

$$\mathrm{sgn}(U(w)-w)=\mathrm{sgn}(w_0-w),\tag{7.4}$$

$$\mathrm{sgn}(V(w)-w)=\mathrm{sgn}(w_0-w).\tag{7.5}$$

（3）当$f_0=f_1$ (a.e.μ)且$\int_{\mathscr{X}}f_1\ \ln\frac{f_2}{f_1}\mathrm{d}\mu>-\infty$时，$U(\cdot)$是严格增函数且$\lim\limits_{v\to\infty}U(v)=\infty$。

（4）当$f_0=f_2$(a.e.μ)且$\int_{\mathscr{X}}f_2\ln\frac{f_2}{f_1}\mathrm{d}\mu<\infty$时，$V(\cdot)$是严格增函数且$\lim\limits_{u\to\infty}V(u)=\infty$。

证明 先证(1)。设$\int_{\mathscr{X}}f_0\ \ln\frac{f_2}{f_1}\mathrm{d}\mu>0$。我们说存在检验$(\tau,d)$满足：

$$\tau\geqslant 1,\quad E_0\tau<\infty,\quad \alpha<1,\quad \beta=0.$$

实际上，取

$$\tau = \inf\left\{n:\ n\geqslant 1, \sum_{i=1}^{n}\ln\frac{f_2(X_i)}{f_1(X_i)}>0\right\},$$

在$\{\tau<\infty\}$上令$d=2$（即接受H_2）。从强大数律知$P_2(\tau<\infty)=1$，故$\beta=0$。从本章定理3.3知$E_0\tau<\infty$。我们指出$\alpha<1$。用反证法。若$\alpha=1$，则$P_1(\tau<\infty)=1$，于是

$$E_1\left(\sum_{1}^{\tau}\ln\frac{f_2(X_i)}{f_1(X_i)}\right)>0.$$

但是

$$E_1\left(\sum_{1}^{\tau}\ln\frac{f_2(X_i)}{f_1(X_i)}\right)=E_1\left(\ln\left(\prod_{1}^{\tau}f_2(X_i)/\prod_{i=1}^{\tau}f_1(X_i)\right)\right)$$

$$\leqslant E_1\left(\prod_{1}^{\tau}f_2(X_i)/\prod_{1}^{\tau}f_1(X_i)\right)-1$$

$$=P_2(\tau<\infty)-1\leqslant 0.$$

这个矛盾就证明了$\alpha<1$。

令$u=\dfrac{1}{1-\alpha}E_0\tau$，则对一切$v\geqslant 0$，

$$R_1(u,v)\leqslant E_0\tau+u\alpha=u.$$

根据(7.2)知$U(v)\leqslant u$，故$U(\cdot)$有界。用同样的方法可以证明，当

$$\int_{\mathscr{X}} f_0\ln\frac{f_2}{f_1}\mathrm{d}\mu<0$$

时，$V(\cdot)$是有界的。

现在来证明(2)。既然假设

$$\int_{\mathscr{X}} f_0\ln\frac{f_2}{f_1}\mathrm{d}\mu\neq 0,$$

从(1)知$U(\cdot)$有界或者$V(\cdot)$有界。不妨设$U(\cdot)$有界（当$V(\cdot)$有界时可进行类似的讨论）。故w充分大时$U(w)-w<0$。而$U(0)-0$

>0，于是有$w_0>0$使得

$$U(w_0)-w_0=0.$$

由于$U(\cdot)$是凹函数，这样的w_0只有一个且(7.4)成立。

从(7.2)，(7.3)和(7.4)直接推知(7.5)成立。

现在来证明(3)。首先指出，一旦证明了$U(v)$是无界的，则$\lim\limits_{v\to\infty}U(v)=\infty$且$U(\cdot)$是严格增的。实际上，因为$U(\cdot)$是不减的，$\lim\limits_{v\to\infty}U(v)=\infty$，若有$U(v_1)=U(v_2)$ $(v_1<v_2)$，则右导数$U'_+(v_1)=0$。由于$U(\cdot)$是凹函数，对一切$v>v_1$有$U'_+(v)=0$，从而$U(\cdot)$在$[v_1,\infty)$上为常数。这与$U(\cdot)$是无界的相冲突。故$U(\cdot)$是严格增函数。

以下用反证法来证明$U(\cdot)$是无界的。设$U(\cdot)$有界，即有$L>0$，满足$U(v)<L$（一切$v\geq0$）。给定$\varepsilon\in(0,1)$，$\delta\in\left(0,\dfrac{1}{2L}\right)$。令

$$\Gamma=\{(\tau,d):\ (\tau,d)\text{是检验法且}\tau\geq1\},$$

$$\Gamma_1=\{(\tau,d):\ (\tau,d)\in\Gamma\text{且}\beta\geq\varepsilon\},$$

$$\Gamma_2=\{(\tau,d):\ (\tau,d)\in\Gamma\text{且}\alpha<1-\delta,\beta<\varepsilon\},$$

$$\Gamma_3=\{(\tau,d):\ (\tau,d)\in\Gamma\text{且}\alpha\geq1-\delta,\ \beta<\varepsilon\}.$$

从$U(v)$之定义知

$$\inf_{(\tau,d)\in\Gamma}(E_1\tau+U(v)(\alpha-1)+v\beta)=0.$$

于是有

$$\inf_{(\tau,d)\in\Gamma}(E_1\tau+v\beta+L(\alpha-1))\leq0. \tag{7.6}$$

记$x\wedge y\wedge z=\min(x,y,z)$。显然

$$\begin{aligned}
&\inf_{(\tau,d)\in\Gamma}(E_1\tau+v\beta+L(\alpha-1))\\
&\quad\geq\inf_{(\tau,d)\in\Gamma_1}(E_1\tau+v\beta+L(\alpha-1))\wedge\inf_{(\tau,d)\in\Gamma_2}(E_1\tau+v\beta+L(\alpha-1))\\
&\quad\quad\wedge\inf_{(\tau,d)\in\Gamma_3}(E_1\tau+v\beta-L(\alpha-1))\\
&\quad\geq(1+v\varepsilon-L)\wedge\inf_{(\tau,d)\in\Gamma_2}(E_1\tau-L)\wedge\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

从定理4.4知

$$E_1\tau \geqslant \frac{1}{E_1 z_1}\left\{(1-\alpha)\ln\frac{\beta}{1-\alpha}+\alpha\ln\frac{1-\beta}{\alpha}\right\},$$

这里 $z_1=\ln\dfrac{f_2(X_1)}{f_1(X_1)}$. 由于$E_1 z_1<0,\beta<\varepsilon$，只要 $\varepsilon>0$ 足够小，必有

$$\inf_{(\tau,d)\in\Gamma_2} E_1\tau > 2L.$$

再取 v 充分大，使得$1-v\varepsilon-L>0$，于是

$$\inf_{(\tau,d)\in\Gamma}(E_1\tau+v\beta+L(\alpha-1))>0,$$

这与(7.6)式相冲突。故$U(\cdot)$是无界的。

用同样的方法可证明定理 7.2 的结论（4）成立。定理7.2全部证毕。

（2）SPRT的最优性。

沿用上一段中的记号。

定理7.3 设(τ,d),(τ',d')是对于假设H_1(对立假设是H_2)的两个检验法，相应的犯两类错误的概率分别是 $\alpha,\beta;\alpha',\beta'$。假设$(\tau,d)$是与 SPRT 类似的检验，即对于某个 $A<B(0<A\leqslant 1\leqslant B<\infty,A\neq B)$及一切$n\geqslant 0$，有

$$\{\tau=n,d=2\}\subset\left\{\frac{f_{2n}}{f_{1n}}\geqslant B\right\},$$

$$\{\tau=n,d=1\}\subset\left\{\frac{f_{2n}}{f_{1n}}\leqslant A\right\},$$

$$\{\tau>n\}\subset\left\{A\leqslant\frac{f_{2n}}{f_{1n}}\leqslant B\right\}. \tag{7.7}$$

若

$$\alpha'\leqslant\alpha,\quad \beta'\leqslant\beta, \tag{7.8}$$

则必有

$$E_1\tau'\geqslant E_1\tau,\quad E_2\tau'\geqslant E_2\tau, \tag{7.9}$$

而且如果(7.8)中至少有一个是严格的不等式，则(7.9)中都是严格的不等式。

证明 我们来证$E_1\tau'\geqslant E_1\tau$。在定理7.1和7.2中取$P_0=P_1$，这时

$$U_n\equiv u,\quad V_n=v\frac{f_2n}{f_1n}.$$

从(7.7)知

$$P_i(\tau<\infty)=1\ (i=1,2).$$

任意给定检验法$(\tilde{\tau},\tilde{d})$，记$\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$为相应的两类错误的概率。我们指出，存在$u>0,v>0$，使得

$$E_1\tau+u\alpha+v\beta=\inf_{(\tilde{\tau},\tilde{d})}E_1(\tilde{\tau}+u\tilde{\alpha}+v\tilde{\beta}).\qquad(7.10)$$

从(7.4)和(7.5)知

$$U(w_0)=w_0,\quad V(w_0)=w_0,$$

故

$$\frac{V[U(w_0)]}{w_0}=1.$$

从定理7.2知$V(\cdot)$有界(因为$P_0=P_1$)，故

$$\lim_{w\to\infty}\frac{V[U(w)]}{w}=0.$$

因此有$w_1>w_0$，使得

$$\frac{V[U(w_1)]}{w_1}=\frac{A}{B}.$$

令

$$u=U(w_1),\quad v=\frac{w_1}{B},$$

我们来证明(7.10)成立。

因为

$$Av=V[U(w_1)]=V(u),\quad u=U(Bv),\quad Bv>w_0,$$

从(7.4)和(7.5)得到

$$Av \leqslant u, \quad u \leqslant Bv. \tag{7.11}$$

可见

$$\{d=1\} \subset \left\{\frac{f_2\tau}{f_1\tau} \leqslant A\right\} = \left\{v\frac{f_2\tau}{f_1\tau} \leqslant Av\right\} \subset \{V_\tau \leqslant U_\tau\},$$

$$\{d=2\} \subset \left\{\frac{f_2\tau}{f_1\tau} \geqslant B\right\} = \left\{v\frac{f_2\tau}{f_1\tau} \geqslant Bv\right\} \subset \{V_\tau \geqslant U_\tau\}.$$

于是

$$\begin{aligned} E_1\tau + u\alpha + v\beta &= E_1\tau + u\int_{\{d=2\}} \mathrm{d}P_1 + v\int_{\{d=1\}} \frac{f_2\tau}{f_1\tau}\,\mathrm{d}P_1 \\ &= E_1(\tau + \min(U_\tau, V_\tau)). \end{aligned}$$

但从第一段中的讨论知，(7.10)式的右端应为

$$\inf_{\tilde\tau} E_1(\tilde\tau + \min(U_{\tilde\tau}, V_{\tilde\tau})),$$

于是(7.10)与下式等价：

$$E_1(\tau + \min(U_\tau, V_\tau)) = \inf_{\tilde\tau} E_1(\tilde\tau + \min(U_{\tilde\tau}, V_{\tilde\tau})). \tag{7.12}$$

为了证明(7.12)成立，只须验证停时τ满足(7.1)式。从(7.3)知

$$\operatorname{sgn}(R_1(u,w) - w) = \operatorname{sgn}(Av - w). \tag{7.13}$$

从(7.2)知

$$\operatorname{sgn}(R_1(u,w) - u) = \operatorname{sgn}(U(w) - U(Bv)), \tag{7.14}$$

这里

$$u = U(w_1), \quad v = B^{-1}w_1.$$

由此可见，$V_n \geqslant Bv$时，$R_1(u,V_n) \geqslant u$，从而

$$\min(u, V_n, R_1(u,V_n)) = \min(u, V_n) = u;$$

当$V_n \leqslant Av$时，$R_1(u,V_n) \geqslant V_n$，从而

$$\min(u, V_n, R_1(u,V_n)) = \min(u, V_n) = V_n;$$

当$Av\leqslant V_n\leqslant Bv$时，从(7.13)和(7.14)知

$$R_1(u,V_n)\leqslant V_n,\quad R_1(u,V_n)\leqslant u,$$

从而

$$\min(u,V_n,R_1(u,V_n))=R_1(u,V_n).$$

注意$U_n\equiv u$，$R(u,v)=\min(u,v,R_1(u,v))$，我们有

$$R(U_n,V_n)=\begin{cases}\min(U_n,V_n), & \text{当}V_n\geqslant Bv\text{或}V_n\leqslant Av,\\ R_1(U_n,V_n), & \text{当}Av\leqslant V_n\leqslant Bv.\end{cases}$$

但是从τ的特性知

$$\{\tau=n\}\subset\{V_n\geqslant Bv\text{或}V_n\leqslant Av\},$$

$$\{\tau>n\}\subset\{Av\leqslant V_n\leqslant Bv\},$$

故τ满足(7.1)。因此(7.12)成立，从而(7.10)成立。

从(7.10)知

$$E_1\tau+u\alpha+v\beta\leqslant E_1\tau'+u\alpha'+v\beta'.$$

既然假设$\alpha'\leqslant\alpha,\beta'\leqslant\beta$，于是$E_1\tau'\geqslant E_1\tau$。同理可证$E_2\tau'\geqslant E_2\tau$。故(7.9)成立。不难看出，只要(7.8)中至少有一个严格的不等式，则(7.9)中都是严格的不等式。定理7.3全部证毕。

(3) 最优检验的唯一性。

定理7.3告诉我们，SPRT是最优的检验法，即在两类错误概率限定为α,β的所有检验中(包括一切序贯的和非序贯的在内)，SPRT(如果存在的话)的平均样本量最小。自然问：是否有别的检验法与SPRT同样的好？本段的结论是，在一定条件下，不存在别的与SPRT同样好的检验。

定理7.4 设$X_1,X_2,\cdots$是$(\Omega,\mathscr{F},P_i)(i=1,2)$上的相互独立同分布的随机变量(随机元)列，$X_1$在$P_i$下的密度是$f_i(x)$(关于某$\sigma$有限测度$\mu$)，$i=1,2$。设

$$E_1\left(\ln\frac{f_2(X_1)}{f_1(X_1)}\right)>-\infty,\quad E_2\left(\ln\frac{f_1(X_1)}{f_2(X_1)}\right)>-\infty,$$

用H_i表示假设"$f_i(x)$是X_1的真正密度"。设(τ,d)是检验H_1(对立假设是H_2)的SPRT，两类错误概率分别是α,β。若$(\hat{\tau},\hat{d})$是任

一满足下列条件的检验法：

$$E_i\hat{\tau}=E_i\tau\ (i=1,2),\quad \hat{\alpha}=\alpha,\quad \hat{\beta}=\beta,$$

这里$\hat{\alpha},\hat{\beta}$分别是$(\hat{\tau},\hat{d})$的两类错误概率，则有下列结论：

$$P_i(\hat{\tau}=\tau,\hat{d}=d)=1\ (i=1,2).$$

证明 沿用定理7.3的证明中的记号。既然(τ,d)是SPRT，故有$A<B$，使得$(\tau,d)=S(A,B)$。取$w_1>0$，满足：

$$v[U(w_1)]/w_1=A/B.$$

令$u=U(w_1),v=w_1B^{-1}$。从(7.12)知τ和$\hat{\tau}$都是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P_1)$上序列$(y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$的最优停时，这里

$$y_n=-n-\min(U_n,V_n),$$

$$\mathscr{F}_n=\sigma(X_1,\cdots,X_n),\quad \mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}.$$

我们指出τ是这个序列的最小最优停时。为此，令

$$\gamma_n=\mathrm{e.sup}\{E_1(y_\eta|\mathscr{F}_n):\ \eta\text{是停时且}\eta\geqslant n\}.$$

从第一章§8知

$$\gamma_n=-R_0(U_n,V_n)-n(n\geqslant 0).$$

从第一章定理5.2知

$$\sigma=\inf\{n:\ \gamma_n=y_n\}$$

是序列$(y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$的最小最优停时。下面指出$\sigma=\tau$。实际上，

$$\sigma=\inf\{n:\ R_0(U_n,V_n)=\min(U_n,V_n)\}.$$

由于

$$R_0(u,v)=\min(u,v,R_1(u,v)),$$

故

$$\sigma=\inf\{n:\ U_n\leqslant R_1(U_n,V_n)\ \text{或}V_n\leqslant R_1(U_n,V_n)\}.$$

现在$U_n\equiv u,V_n=vL_n$，这里

$$L_n=\prod_{i=1}^{n}f_2(X_i)/\prod_{i=1}^{n}f_1(X_i).$$

从(7.13)及(7.14)知

$$\sigma = \inf\{n:\ U(Bv) \leqslant U(V_n)\ 或 V_n \leqslant Av\},$$

根据定理7.2的第(3)条，$U(\cdot)$是严格增函数，故

$$\sigma = \inf\{n:\ V_n \geqslant Bv 或 V_n \leqslant Av\} = \inf\{n:\ L_n \notin (A, B)\},$$

这表明σ正好是SPRT $S(A,B)$的停时τ。所以τ是最小最优停时。既然

$$P_1(\tau \leqslant \hat{\tau}) = 1, \quad E_1\hat{\tau} = E_1\tau < \infty,$$

故 $P_1(\tau = \hat{\tau}) = 1$。同理可证 $P_2(\tau = \hat{\tau}) = 1$。现在来证下列各式

$$P_2(\hat{d} = 2, d = 1) = 0, \tag{7.15}$$

$$P_1(\hat{d} = 1, d = 2) = 0, \tag{7.16}$$

$$P_2(\hat{d} = 1, d = 2) = 0, \tag{7.17}$$

$$P_1(\hat{d} = 2, d = 1) = 0. \tag{7.18}$$

注意

$$\alpha = P_1(d = 2) = P_1(d = \hat{d} = 2) + P_1(d = 2, \hat{d} = 1),$$

$$\hat{\alpha} = P_1(\hat{d} = 2) = P_1(d = \hat{d} = 2) + P_1(\hat{d} = 2, d = 1).$$

既然假设$\alpha = \hat{\alpha}$，故有

$$P_1(d = 2, \hat{d} = 1) = P_1(\hat{d} = 2, d = 1). \tag{7.19}$$

同理，从$\beta = \hat{\beta}$知

$$P_2(d = 1, \hat{d} = 2) = P_2(d = 2, \hat{d} = 1). \tag{7.20}$$

不难看出，

$$\begin{aligned}
BP_2(d = 2, \hat{d} = 1) &= BP_2(d = 1, \hat{d} = 2) \\
&= B \int_{\{d = 1, \hat{d} = 2\}} L_\tau \mathrm{d}P_1 \leqslant BAP_1(d = 1, \hat{d} = 2) \\
&= BAP_1(d = 2, \hat{d} = 1) \\
&= BA \int_{\{d = 2, \hat{d} = 1\}} L_\tau^{-1} \mathrm{d}P_2 \leqslant AP_2(d = 2, \hat{d} = 1).
\end{aligned}$$

但是 $A < B$，故 $P_2(d = 2, \hat{d} = 1) = 0$。这就证明了(7.17)成立。再由(7.20)知(7.15)也成立。

另一方面，

$$P_1(\hat{d}=1, d=2)=\int_{\{\hat{d}=1, d=2\}} L_\tau^{-1}\mathrm{d}P_2,$$

于是从(7.17)推知(7.16)成立。从(7.19)知(7.18)也成立。于是$P_i(d\neq\hat{d})=0(i=1,2)$。定理7.4证毕。

令

$$\mathscr{F}(\alpha_0,\beta_0)=\{\Delta=(\tau,d):\ \alpha(\Delta)\leqslant\alpha_0,\beta(\Delta)\leqslant\beta_0\},$$

这里$\alpha(\Delta),\beta(\Delta)$分别是检验法$\Delta$犯第一类、第二类错误的概率。

定义 称$\mathscr{F}(\alpha_0,\beta_0)$中的检验法$\tilde{\Delta}=(\tilde{\tau},\tilde{d})$是最优的，若对任何$\Delta=(\tau,d)\in\mathscr{F}(\alpha_0,\beta_0)$，有

$$E_i\tau\geqslant E_i\tilde{\tau}\ \ (i=1,2).$$

从定理7.4不难得到下列唯一性定理：

定理7.5 在定理7.4的假设下，若有SPRT$\Delta=(\tau,d)$满足

$$\alpha(\Delta)=\alpha_0,\quad \beta(\Delta)=\beta_0,$$

则这个Δ便是$\mathscr{F}(\alpha_0,\beta_0)$中唯一最优的检验法。

证明 从定理7.3知Δ是$\mathscr{F}(\alpha_0,\beta_0)$中最优的检验法。若$\tilde{\Delta}=(\tilde{\tau},\tilde{d})$是$\mathscr{F}(\alpha_0,\beta_0)$中任一最优检验法，则

$$\alpha(\tilde{\Delta})\leqslant\alpha(\Delta)=\alpha_0,\quad \beta(\tilde{\Delta})\leqslant\beta(\Delta)=\beta_0.$$

根据Δ的最优性知

$$E_i\tilde{\tau}\geqslant E_i\tau\ \ (i=1,2).$$

由于$\tilde{\Delta}$的最优性知

$$E_i\tilde{\tau}=E_i\tau\ \ (i=1,2).$$

再根据定理7.3知

$$\alpha(\tilde{\Delta})=\alpha(\Delta),\quad \beta(\tilde{\Delta})=\beta(\Delta).$$

利用定理7.4知

$$P_i(\tilde{\tau}=\tau,\tilde{d}=d)=1\ \ (i=1,2).$$

这就证明了Δ是唯一的最优检验法。证毕。

值得提出的是，在我们叙述的定理7.4和7.5中并未对似然比$f_2(X_1)/f_1(X_1)$的概率分布施加任何限制条件。而以往的文献均

在假定似然比的分布函数是连续函数的前提下给出唯一性的结论(参看薛行鸿(1985))。

§8 隔离型假设的检验

前面是检验简单假设(对立假设也是简单假设)，这种情况的检验理论已相当完善，Wald 提出的SPRT比较圆满地解决了问题①.但在实际中碰到的多是复杂假设.假定总体X的分布函数是$F(x,\theta)$，这里$\theta\in\Theta$。设Θ_1,Θ_2是Θ之子集，都可能不只一个元素，$\Theta_1\cap\Theta_2=\varnothing$。考虑检验问题：

$$H_1:\ \theta\in\Theta_1\longleftrightarrow H_2:\ \theta\in\Theta_2.$$

H_1的含义是：总体的参数θ属于Θ_1。

对于复杂假设的检验，研究起来就困难得多，迄今尚未有很一般的完善的理论。在研究中需对Θ_1与Θ_2的相互关系进行分类考察，通常Θ是距离空间(特别是欧氏空间)中的集合。当Θ_1与Θ_2的距离是正数时，称检验问题是隔离型的；当Θ_1与Θ_2的距离是零时，称检验问题是相邻型的。这两类检验问题的处理方法有较大差别，本节只对单实参数的隔离型假设的检验问题进行讨论。我们将看到，这种情形仍然可用SPRT进行检验，虽然此时SPRT的优良性不及简单假设情形的好。

设X的分布密度是$f(x,\theta)$(关于某σ有限测度μ)，其中$\theta\in\Theta=\langle\underline{\theta},\bar{\theta}\rangle$，$\Theta$是有限或无限区间。给定$\theta_i\in(\underline{\theta},\bar{\theta})(i=1,2)$，$\theta_1<\theta_2$。假设$H_1$是“$\theta\leqslant\theta_1$”，$H_2$是“$\theta\geqslant\theta_2$”。对于检验问题

$$H_1\longleftrightarrow H_2,$$

采用什么检验法？设$X_1,X_2,\cdots$是$(\Omega,\mathscr{F},P_\theta)(\theta\in\Theta)$上的相互独立同分布的随机变量列，$X_1$在$P_\theta$下的分布密度是$f(x,\theta)$。考察

① 在实际使用时，有时还嫌SPRT不够好。虽然平均样本量小，但样本量并没有上限。实际中大量使用截尾的SPRT，即要求样本量不超过某个适当的正整数N。这时两类错误的概率需要仔细研究。

似然比

$$\lambda_n=\prod_{i=1}^{n}f(X_i,\theta_2)\Big/\prod_{i=1}^{n}f(X_i,\theta_1).$$

我们仍形式上采用SPRT．固定$0<A<1<B<\infty$，令

$$\tau^*=\inf\{n:\ n\geqslant 1,\lambda_n\overline{\in}(A,B)\}. \tag{8.1}$$

当$\lambda_{\tau^*}\geqslant B$时拒绝$H_1$，当$\lambda_{\tau^*}\leqslant A$时接受$H_1$．这个检验法仍记作$S(A,B)$．它有什么特性呢？我们必须研究两个量，一个是施行特性函数，即

$$L(\theta)=P_\theta(\text{接受}H_1)=P_\theta(\tau^*<\infty,\lambda_{\tau^*}\leqslant A),$$

另一个是平均样本量$E_\theta\tau^*$．

我们希望A,B的值应选得好，使得$\theta\leqslant\theta_1$时$L(\theta)$很接近于1，当$\theta\geqslant\theta_2$时$L(\theta)$很接近于0，而且$E_\theta\tau^*$很小．

对$L(\theta)$与$E_\theta\tau^*$进行研究是很复杂的(特别是第二个量)，需要对总体的分布函数$F(x,\theta)$加一定的限制．

定义8.1 称分布函数族$\{F(x,\theta):\ \theta\in\langle\underline{\theta},\bar{\theta}\rangle\}$是随机增的，若对一切$\theta_1<\theta_2$，$F(x,\theta_1)\not\equiv F(x,\theta_2)$且$F(x,\theta_1)\geqslant F(x,\theta_2)$(一切$x$)．

随机增族是很广泛的概念．

定义8.2 称$\{F(x,\theta)\}$有单调似然比，若$F(x,\theta)$有密度函数$f(x,\theta)$(关于某σ有限的测度μ)且对一切$\theta_1<\theta_2$，存在增函数$q(x)\not\equiv 1$，满足

$$f(x,\theta_2)=f(x,\theta_1)q(x). \tag{8.2}$$

众所周知，单参数指数族分布(即密度函数为$e^{\theta x-\psi(\theta)}$形的分布)是有单调似然比的．

引理8.1 设$\{F(x,\theta):\ \theta\in\langle\underline{\theta},\bar{\theta}\rangle\}$有单调似然比，则它是随机增的．

证明 固定$\theta_1<\theta_2$，对有界的不增函数w，从(8.2)知

$$\int_{-\infty}^{\infty}w\mathrm{d}F(x,\theta_2)-\int_{-\infty}^{\infty}w\mathrm{d}F(x,\theta_1)=\int_{-\infty}^{\infty}(w-C)(q-1)\mathrm{d}F(x,\theta_1),$$

这里C是任意常数。因为$q(x)\not\equiv 1$，有x_1,x_2满足

$$q(x_1)\leqslant 1<q(x_2)。$$

令

$$x_0=\inf\{x: q(x)>1\},$$

则$x<x_0$时，$q(x)\leqslant 1, x>x_0$时，$q(x)>1$。令$C=w(x_0)$，则$x<x_0$时，$w(x)\geqslant C, q(x)\leqslant 1$，从而

$$(w-C)(q-1)\leqslant 0;$$

$x>x_0$时，$w(x)\leqslant C, q(x)>1$，从而

$$(w-C)(q-1)\leqslant 0。$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} w\mathrm{d}F(x,\theta_2)\leqslant\int_{-\infty}^{\infty} w\mathrm{d}F(x,\theta_1)。$$

令$w(x)=I_{(-\infty,a]}(x)$(示性函数)，得

$$F(a,\theta_2)\leqslant F(a,\theta_1)\ \ (一切a)。$$

这就证明了$\{F(x,\theta)\}$是随机增的。证毕。

引理8.2 设$F_1(x),F_2(x)$都是分布函数且$F_1(x)\geqslant F_2(x)$（一切x），U是$(0,1)$上均匀分布的随机变量，则存在函数$w_1(\cdot)$及$w_2(\cdot)$，使得$w_1(u)\leqslant w_2(u)$(一切$u\in(0,1)$)而且$w_i(U)$的分布函数是$F_i(x)(i=1,2)$。

证明 令

$$w_i(u)=\inf\{x:F_i(x)\geqslant u\}\ \ (u\in(0,1))。$$

当然$w_1(u)\leqslant w_2(u)$。利用$F_i(x)$的右连续性知

$$P(w_i(U)\leqslant t)=P(U\leqslant F_i(t))=F_i(t)\ \ (i=1,2)。$$

证毕。

系8.1 设分布函数$F_1(x)\geqslant F_2(x)$(一切x)且$\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}F_i$ $(i=1,2)$存在，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}F_1\leqslant\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}F_2。$$

证明 从引理8.2知

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}F_1 = Ew_1(U) \leqslant Ew_2(U) = \int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}F_2.$$

证毕。

定理8.1 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P_\theta)(\theta \in \langle \underline{\theta}, \bar{\theta} \rangle)$ 上的相互独立同分布随机变量列，

$$F(x,\theta) = P_\theta(X_1 \leqslant x).$$

给定 $-\infty \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant \infty (n \geqslant 1)$。记

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad (n \geqslant 1).$$

令

$$\tau = \inf\{n:\ n \geqslant 1, S_n \overline{\in} (a_n, b_n)\},$$
$$\Lambda(\theta) = P_\theta(\tau < \infty, S_\tau \leqslant a_\tau).$$

如果 $\{F(x,\theta)\}$ 是随机增的，则 $\Lambda(\theta)$ 是 θ 的不增函数。

证明 任给定 $\theta_1 < \theta_2$。从引理 8.2 有 $(0,1)$ 上的函数 $w_1(x)$ 和 $w_2(x)$，$w_1(x) \leqslant w_2(x)$（一切 x）且 $w_i(U)$ 的分布函数是 $F(x, \theta_i)$，这里 $i = 1, 2$，U 是 $(0,1)$ 上均匀分布的随机变量。设 $U_1, U_2, \cdots$ 是某概率空间 $(\tilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{F}}, \tilde{P})$ 上相互独立且都服从 $(0,1)$ 上均匀分布的随机变量列，令

$C = \{(u_1, u_2, \cdots)$：存在 $n \geqslant 1$ 使得 $u_1 < b_1, \cdots, u_{n-1} < b_{n-1}, u_n \leqslant a_n\}$，

则

$$\{\tau < \infty, S_\tau \leqslant a_\tau\} = \{(S_1, S_2, \cdots) \in C\},$$

于是

$$\begin{aligned} &P_{\theta_1}(\tau < \infty, S_\tau \leqslant a_\tau) \\ &= P_{\theta_1}\{(S_1, S_2, \cdots) \in C\} \\ &= \tilde{P}\left\{\left(\cdots, \sum_{i=1}^{n} w_1(U_i), \cdots\right) \in C\right\} \end{aligned}$$

$$\geqslant \tilde{P}\left\{\left(\cdots,\sum_{i=1}^{n} w_2(U_i),\cdots\right)\in C\right\}$$

$$=P_{\theta_2}\{(S_1,S_2,\cdots)\in C\}$$

$$=P_{\theta_2}(\tau<\infty, S_\tau\leqslant a_\tau).$$

故 $\Delta(\theta)$是 θ 的不增函数。证毕。

设总体X的分布密度 $f(x,\theta)=e^{\theta x-\psi(\theta)}$(关于某个 σ 有限测度 μ)。设 $\theta_1<\theta_2$，对于检验问题

$$H_1:\ \theta\leqslant\theta_1\longleftrightarrow H_2:\ \theta\geqslant\theta_2,$$

采用停止法则(8.1)，经过计算知

$$\tau^*=\inf\{n:\ n\geqslant 1,\ S_n\overline{\in}(a_n,b_n)\},$$

其中

$$S_n=\sum_1^n X_i,$$

$$a_n=\frac{\ln A}{\theta_2-\theta_1}+n\frac{\psi(\theta_2)-\psi(\theta_1)}{\theta_2-\theta_1},$$

$$b_n=\frac{\ln B}{\theta_2-\theta_1}+n\frac{\psi(\theta_2)-\psi(\theta_1)}{\theta_2-\theta_1}\quad (n\geqslant 1).$$

当 $S_{\tau^*}\leqslant a_{\tau^*}$ 时接受 H_1，当 $S_{\tau^*}\geqslant b_{\tau^*}$ 时拒绝 H_1。

对于这个检验法 $S(A,B)$，$L(\theta)$是 θ 的不增函数。给定 α,β，取 A,B 使得

$$1-L(\theta_1)\leqslant\alpha,\quad L(\theta_2)\leqslant\beta,$$

则对于一切 $\theta\leqslant\theta_1$ 均有$1-L(\theta)\leqslant\alpha$；对于一切 $\theta\geqslant\theta_2$ 均有$L(\theta)\leqslant\beta$。换句话说，两类错误的概率分别不超过给定的 α,β。至于 $L(\theta)$ 及 $E_\theta\tau^*$ 的近似计算和估计，请参看本章 §4 及 §6.

我们特别指出，$E_\theta\tau^*$作为 θ 的函数表现甚为复杂，即使总体服从最普通的正态分布也是如此。若限制两类错误概率分别为 α 和 β，SPRT 的平均样本量 $E_\theta\tau^*$ 在 θ_1 和 θ_2 处很小，但在 θ_1 与 θ_2

之间却可能很大，而有同样 α,β 值的固定样本量检验法，其样本量虽然比 $E_{\theta_i}\tau^*$ 大，但在 (θ_1,θ_2) 中的某些点上却比 $E_\theta\tau^*$ 来得小。已经证明，当 $X_1\sim N(\theta,1)$ 时，取 $\theta_0=\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$，则 $\alpha=\beta\to 0$ 时，$E_{\theta_0}\tau^*\sim C|\ln\alpha|^2$（$C$ 是常数）；而同样 α,β 值的固定样本量检验法的样本量 $n_0\sim a|\ln\alpha|\ (\alpha\to 0)$，这里 a 是常数。

序贯分析的一个重要组成部分就是朝着改进 SPRT 的上述缺点的方向进行。

一个重要提法是这样的：对于检验问题

$$H_1:\ \theta\leqslant\theta_1\longleftrightarrow H_2:\ \theta\geqslant\theta_2\ \ (\theta_1<\theta_2),$$

找出这样的检验法 (τ,d)，使得两类错误概率不超过给定的 α,β 而且 $\sup\limits_\theta E_\theta\tau$ 达到最小值。这就是所谓的 Kiefer-Weiss 问题。这个问题相当复杂，迄今未能解决。值得注意的是，对于指数族的分布，M.D.Huffman(1983)利用 G. Lorden(1976)的 2-SPRT 方法给出了 Kiefer-Weiss 问题在渐近意义下的解答。下面介绍 2-SPRT 并论述 Huffman 的结果①。

设 X 的分布密度（关于某 σ 有限测度 μ）为

$$f(x,\theta)=\exp\{\theta x-\psi(\theta)\},\tag{8.3}$$

其中 $\theta\in\Theta=(\underline{\theta},\bar{\theta})$，$-\infty\leqslant\underline{\theta}<\bar{\theta}\leqslant\infty$。

研究检验问题：

$$H_1:\ \theta\leqslant\theta_1\longleftrightarrow H_2:\ \theta\geqslant\theta_2,\tag{8.4}$$

其中 $\theta_1<\theta_2,\theta_i\in\Theta(i=1,2)$。

设 $x_1,x_2,\cdots$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P_\theta)(\theta\in\Theta)$ 上独立同分布的随机变量列，共同分布密度是(8.3)。记 $\mathscr{F}_n=\sigma(x_1,\cdots,x_n)$（使 $x_1,\cdots,x_n$ 可测的最小 σ 代数），$n\geqslant 1$。称 $\Delta=(\tau,d)$ 是(8.4)的序贯检验法，若 τ 是 σ 代数流 $\{\mathscr{F}_n\}$ 的停时，d 是 $(\Omega_\tau,\mathscr{F}_\tau)$ 到 $\{1,2\}$

① 下面的论述比 Huffman 的原文有改进。Huffman 只考虑简单假设的检验问题：$\theta=\theta_1\longleftrightarrow\theta=\theta_2$，我们推广至复杂假设 $(\theta\leqslant\theta_1\longleftrightarrow\theta\geqslant\theta_2)$ 的检验，论证方法也有很大不同。

的可测映射，这里

$$\Omega_\tau=\{\tau<\infty\},$$

$$\mathscr{F}_\tau=\{B:\ 对一切\ n\geqslant 1, B\cap\{\tau\leqslant n\}\in\mathscr{F}_n\},$$

$d=2$ 表示拒绝 H_1，$d=1$ 表示接受 H_1。

给定 $\alpha>0,\beta>0(\alpha+\beta<1)$，令

$$\mathscr{F}(\alpha,\beta)=\{\Delta=(\tau,d):\ \sup_{\theta\leqslant\theta_1}P_\theta(d=2)\leqslant\alpha,$$

$$\sup_{\theta\geqslant\theta_2}P_\theta(d=1)\leqslant\beta\}. \tag{8.5}$$

我们的目标是从 $\mathscr{F}(\alpha,\beta)$ 中找出优良的检验法。不难看出，在 $\mathscr{F}_n$ 上 P_θ 对 P_φ 的 Radon Nikodym 导数$\left(记作\left(\dfrac{\mathrm{d}P_\theta}{\mathrm{d}P_\varphi}\right)_n\right)$为

$$\exp\{(\theta-\varphi)s_n-n(\psi(\theta)-\psi(\varphi))\},$$

其中 $s_n=\sum_1^n x_i$。

实际上，

$$\left(\frac{\mathrm{d}P_\theta}{\mathrm{d}P_\varphi}\right)_n=\frac{\prod_1^n f(x_i,\theta)}{\prod_1^n f(x_i,\varphi)}$$

$$=\exp\{(\theta-\varphi)s_n-n(\psi(\theta)-\psi(\varphi))\}.$$

任意固定 $\tilde\theta\in(\theta_1,\theta_2)$，令

$$\tilde\tau=\tilde\tau(\tilde\theta)=\inf\left\{n:\ \left(\frac{\mathrm{d}P_{\tilde\theta}}{\mathrm{d}P_{\theta_1}}\right)_n\geqslant\frac{1}{\alpha}\ 或\left(\frac{\mathrm{d}P_{\tilde\theta}}{\mathrm{d}P_{\theta_2}}\right)_n\geqslant\frac{1}{\beta}\right\}, \tag{8.6}$$

$$\tilde d=\tilde d(\tilde\theta)=I\left(\tilde\tau<\infty,\left(\frac{\mathrm{d}P_{\tilde\theta}}{\mathrm{d}P_{\theta_1}}\right)_{\tilde\tau}\geqslant\frac{1}{\alpha}\right)+1, \tag{8.7}$$

这里 $I(A)$ 是 A 的示性函数，$\left(\dfrac{\mathrm{d}P_{\tilde\theta}}{\mathrm{d}P_{\theta_1}}\right)_{\tilde\tau}$ 是在 $\mathscr{F}_{\tilde\tau}$ 上 $P_{\tilde\theta}$ 对 P_{θ_1} 的 Radon-Nikodym 导数，即

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,P_{\tilde{\theta}}}{\mathrm{d}\,P_{\theta_1}}\right)_{\tilde{\tau}} = \exp\{(\tilde{\theta} - \theta_1)s_{\tilde{\tau}} - \tilde{\tau}(\psi(\tilde{\theta}) - \psi(\theta_1))\}.$$

$\tilde{\Delta}(\tilde{\theta}) = (\tilde{\tau}(\tilde{\theta}), \tilde{d}(\tilde{\theta}))$便是 Lorden 的 2-SPRT. 我们首先证明，$\tilde{\tau}(\tilde{\theta})$是有上界的而且 $\tilde{\Delta}(\tilde{\theta}) \in \mathscr{F}(\alpha,\beta)$.

记

$$K(\theta,\varphi) = (\theta - \varphi)\psi'(\theta) - (\psi(\theta) - \psi(\varphi)). \qquad (8.8)$$

不难看出

$$\tilde{\tau}(\tilde{\theta}) = \inf\{n;\ s_n \geqslant an + a_0 \text{ 或 } s_n \leqslant bn + b_0\}, \qquad (8.9)$$

这里

$$a = \frac{\psi(\tilde{\theta}) - \psi(\theta_1)}{\tilde{\theta} - \theta_1}, \qquad a_0 = \frac{|\ln \alpha|}{\tilde{\theta} - \theta_1},$$

$$(8.10)$$

$$b = \frac{\psi(\tilde{\theta}) - \psi(\theta_2)}{\tilde{\theta} - \theta_2}, \qquad b_0 = \frac{|\ln \beta|}{\tilde{\theta} - \theta_2}.$$

令

$$t(\tilde{\theta}) = \frac{a_0 - b_0}{b - a}. \qquad (8.11)$$

引理8.3 设 $\tilde{n}$ 是不小于 $t(\tilde{\theta})$的最小整数，则

$$\tilde{\tau}(\tilde{\theta}) \leqslant \tilde{n}.$$

证明 由于 $\psi''(\theta) > 0, \theta_1 < \tilde{\theta} < \theta_2$, 知 $a < \psi'(\tilde{\theta}) < b$($a,b$之定义见(8.10))且$t \geqslant t(\tilde{\theta})$时

$$at + a_0 \leqslant bt + b_0.$$

若 $s_{\tilde{n}} \geqslant a\tilde{n} + a_0$, 则 $\tilde{\tau} \leqslant \tilde{n}$; 若 $s_{\tilde{n}} < a\tilde{n} + a_0$, 则 $s_{\tilde{n}} < b\tilde{n} + b_0$, 从而 $\tilde{\tau} \leqslant \tilde{n}$. 证毕.

引理 8.4 ① 对一切 $\theta \leqslant \theta_1$,

$$\left(\left(\frac{\mathrm{d}\,P_{\tilde{\theta}}}{\mathrm{d}\,P_{\theta_1}}\right)_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\right) \qquad (8.12)$$

是 P_θ 下的上鞅.

② 对一切 $\theta \geqslant \theta_2$,

$$\left(\left(\frac{\mathrm{d}P_{\tilde{\theta}}}{\mathrm{d}P_{\theta_2}}\right)_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1\right) \tag{8.13}$$

是 P_θ 下的上鞅.

证明 首先指出，对任何正整数 u 及 $0\leqslant\theta_1<\tilde{\theta}$ ，有

$$E_\theta\left(\left(\frac{\mathrm{d}P_{\tilde{\theta}}}{\mathrm{d}P_{\theta_1}}\right)_u\right)\leqslant 1. \tag{8.14}$$

实际上，

$$E_\theta\left(\left(\frac{\mathrm{d}P_{\tilde{\theta}}}{\mathrm{d}P_{\theta_1}}\right)_u\right)=E_{\theta_1}\left[\left(\frac{\mathrm{d}P_{\tilde{\theta}}}{\mathrm{d}P_{\theta_1}}\right)_u\cdot\left(\frac{\mathrm{d}P_\theta}{\mathrm{d}P_{\theta_1}}\right)_u\right]$$

$$=E_{\theta_1}\{\exp[(\tilde{\theta}+\theta-2\theta_1)s_u-u(\psi(\tilde{\theta})+\psi(\theta)-2\psi(\theta_1))]\}.$$

由于

$$\psi(\tilde{\theta})-\psi(\tilde{\theta}+\theta-\theta_1)=\int_\theta^{\theta_1}\psi'(\tilde{\theta}+x-\theta_1)\mathrm{d}x\geqslant\int_\theta^{\theta_1}\psi'(x)\mathrm{d}x$$

$$=\psi(\theta_1)-\psi(\theta),$$

于是

$$E_\theta\left(\frac{\mathrm{d}P_{\tilde{\theta}}}{\mathrm{d}P_{\theta_1}}\right)_u\leqslant E_{\theta_1}\{\exp[(\tilde{\theta}-\theta_1+\theta-\theta_1)s_u$$

$$-u(\psi(\tilde{\theta}-\theta_1+\theta)-\psi(\theta_1))]\}$$

$$=E_{\theta_1}\left(\frac{\mathrm{d}P_{\tilde{\theta}-\theta_1+\theta}}{\mathrm{d}P_{\theta_1}}\right)_u=1,$$

这表明(8.14)成立.

对任何 $B\in\mathscr{F}_n=\sigma(x_1,\cdots,x_n)$，有

$$\int_B\left(\frac{\mathrm{d}P_{\tilde{\theta}}}{\mathrm{d}P_{\theta_1}}\right)_{n+u}\mathrm{d}P_\theta$$

$$= \int_B \exp\{(\tilde{\theta} - \theta_1)s_{n+u} - (n+u)(\psi(\tilde{\theta}) - \psi(\theta_1))\} \mathrm{d} P_\theta$$

$$= \int_B \exp\{(\tilde{\theta} - \theta_1)(s_{n+u} - s_n) - u(\psi(\tilde{\theta}) - \psi(\theta_1))\}$$

$$\cdot \exp\{(\tilde{\theta} - \theta_1)s_n - n(\psi(\tilde{\theta}) - \psi(\theta_1))\} \mathrm{d}P_\theta$$

$$= E_\theta\left(\left(\frac{\mathrm{d} P_{\tilde{\theta}}}{\mathrm{d} P_{\theta_1}}\right)_u\right) \cdot \int_B \left(\frac{\mathrm{d} P_{\tilde{\theta}}}{\mathrm{d} P_{\theta_1}}\right)_n \mathrm{d} P_\theta$$

$$\leqslant \int_B \left(\frac{\mathrm{d} P_{\tilde{\theta}}}{\mathrm{d} P_{\theta_1}}\right)_n \mathrm{d} P_\theta.$$

这就证明了随机过程(8.12)是上鞅。同理可证随机过程(8.13)是上鞅。证毕。

定理8.2 $\tilde{d}(\tilde{\theta}) \in \mathscr{T}(\alpha, \beta)$。

证明 令

$$\tau_1 = \inf\left\{n: \left(\frac{\mathrm{d} P_{\tilde{\theta}}}{\mathrm{d} P_{\theta_1}}\right)_n \geqslant \frac{1}{\alpha}\right\},$$

$$\tau_2 = \inf\left\{n: \left(\frac{\mathrm{d} P_{\tilde{\theta}}}{\mathrm{d} P_{\theta_2}}\right)_n \geqslant \frac{1}{\beta}\right\}$$

(恒约定 $\inf \varnothing = \infty$)。对一切 $\theta \leqslant \theta_1$ 有

$$P_\theta(\tilde{d}(\tilde{\theta}) = 2) \leqslant P_\theta(\tau_1 < \infty) \leqslant \int_{\{\tau_1 < \infty\}} \alpha\left(\frac{\mathrm{d} P_{\tilde{\theta}}}{\mathrm{d} P_{\theta_1}}\right)_{\tau_1} \mathrm{d} P_\theta.$$

利用非负上鞅的停止定理及(8.14)知

$$P_\theta(\tilde{d}(\tilde{\theta}) = 2) \leqslant \alpha E_\theta\left(\frac{\mathrm{d} P_{\tilde{\theta}}}{\mathrm{d} P_{\theta_1}}\right)_1 \leqslant \alpha.$$

同理知，对一切 $\theta \geqslant \theta_2$，

$$P_\theta(\tilde{d}(\tilde{\theta}) = 1) \leqslant \beta E_\theta\left(\frac{\mathrm{d} P_{\tilde{\theta}}}{\mathrm{d} P_{\theta_2}}\right)_1 \leqslant \beta.$$

故 $\tilde{d}(\tilde{\theta}) \in \mathscr{T}(\alpha, \beta)$。证毕。

下面指出，在 $\tilde{\Delta}(\tilde{\theta})$的定义中只要 $\tilde{\theta}$ 适当选择，则 $\tilde{\Delta}(\tilde{\theta})$给出了 Kiefer-Weiss 问题在渐近意义下的解。

首先想到，应该选择 $\tilde{\theta}$ 使得 $t(\tilde{\theta})$（见(8.11)）达到最小值。易知

$$t'(\tilde{\theta})=\frac{(\theta_2-\theta_1)[|\ln\beta|K(\tilde{\theta},\theta_1)-|\ln\alpha|K(\tilde{\theta},\theta_2)]}{[(\theta_1-\tilde{\theta})K(\tilde{\theta},\theta_2)+(\tilde{\theta}-\theta_2)K(\tilde{\theta},\theta_1)]^2}.$$

不难看出，当且仅当 $\tilde{\theta}$ 满足

$$K(\tilde{\theta},\theta_2)|\ln\alpha|-K(\tilde{\theta},\theta_1)|\ln\beta|=0 \qquad (8.15)$$

时，$t(\tilde{\theta})$达到最小值。

易知，方程(8.15)在(θ_1,θ_2)中有唯一根 θ^*，且

$$\frac{|\ln\alpha|}{K(\theta^*,\theta_1)}=\frac{|\ln\beta|}{K(\theta^*,\theta_2)}=t(\theta^*). \qquad (8.16)$$

记

$$\hat{\tau}=\tilde{\tau}(\theta^*),\quad \hat{d}=\tilde{d}(\theta^*),\quad \hat{\Delta}=(\hat{\tau},\hat{d}),$$

我们的目标是证明下列主要定理：

定理 8.3① (Huffman(1983)) 设

$$0<c_1\leqslant\frac{|\ln\alpha|}{|\ln\beta|}\leqslant c_2<\infty \quad (c_1,c_2\text{是固定常数}),$$

$$\delta=\max(\alpha,\beta),$$

$$n(\alpha,\beta)=\inf\{\sup_\theta E_\theta\tau:\ (\tau,d)\in\mathscr{F}(\alpha,\beta)\},$$

---

① 这个定理的叙述和证明都与Huffman 的原文有所不同，是笔者给出的。Huffman 定义的 2-SPRT$(\tilde{\tau},\tilde{d})$是这样的：

$$\tilde{\tau}=\tilde{\tau}(\tilde{\theta}),\quad \tilde{d}=\tilde{d}(\tilde{\theta}),$$

其中

$$\tilde{\theta}=\theta^*-\gamma^*[n^*\psi''(\theta^*)]^{-1/2},$$

这里 θ^* 满足(8.16)，$n^*=t(\theta^*)$，γ^* 满足

$$\Phi(\gamma^*)=\frac{(\theta_2-\theta^*)K(\theta^*,\theta_1)}{(\theta_2-\theta^*)K(\theta^*,\theta_1)+(\theta^*-\theta_1)K(\theta^*,\theta_1)}$$

（$\Phi(x)$是标准正态分布函数）。

Huffman 证明了$(\tilde{\tau},\tilde{d})$具有定理 8.3 所述的结论（用 $\tilde{\tau}$ 代替 $\hat{\tau}$）。

则有下列结论：

① $\dfrac{n(\alpha,\beta)}{\sup\limits_{\theta} E_\theta \hat{\tau}} = 1 - O(|\ln\delta|^{-\frac{1}{2}}) \quad (\delta \to 0)$；

② $\lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{n(\alpha,\beta)}{\sup\limits_{\theta} E_\theta \hat{\tau}} = 1$。

换句话说，2-SPRT $\hat{\Delta} = (\hat{\tau}, \hat{d})$给出了 Kiefer-Weiss 问题在渐近意义下的解。

定理 8.3 的证明相当长，我们首先证明三个引理，其中引理 8.6 本身具有独立的重要价值。

引理 8.5 设 $z_1, z_2, \cdots$ 是$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上独立同分布的随机变量列，$s_n = \sum\limits_1^n z_i \ (n \geq 1)$，$Ez_1 > 0$，

$$M(t) = \inf\{n: \ s_n \geq t\} \quad (t > 0),$$

则

$$EM(t+u) \leq EM(t) + EM(u) \quad (t \geq 0, u \geq 0).$$

证明 不妨设 $u > 0$，记

$$\mathscr{F}_n = \sigma(z_1, \cdots, z_n).$$

设 $m \geq n$，则

$$\begin{aligned}
&P(M(t+u) = m \mid \mathscr{F}_n) \\
&\quad = P(s_1 < t+u, \cdots, s_{m-1} < t+u, s_m \geq t+u \mid \mathscr{F}_n) \\
&\quad \leq P\{s_{n+1} - s_n < t+u-s_n, \cdots, s_{m-1} - s_n \\
&\qquad\quad < t+u-s_n, s_m - s_n \geq t+u-s_n \mid \mathscr{F}_n\} \\
&\quad = P(s_{n+1} - s_n < t+u-r, \cdots, s_{m-1} - s_n \\
&\qquad\quad < t+u-r, s_m - s_n \geq t+u-r)|_{r=s_n} \\
&\quad = P(M(t+u-r) = m-n)|_{r=s_n},
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
E[M(t+u) - M(t)] &= \sum_{m \geq n} (m-n) P(M(t+u) = m, M(t) = n) \\
&= \sum_{m \geq n} (m-n) \int_{\{M(t) = n\}} P(M(t+u) \mid \mathscr{F}_n) \, dP
\end{aligned}$$

$$= \sum_{m \geq n} (m-n) \int_{\{M(t)=n\}} P(M(t+u-r)=m-n)\,|_{r=s_n} \mathrm{d}P$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{M(t)=n\}} \sum_{m=n}^{\infty} (m-n)P(M(t+u-r=m-n)\,|_{r=s_n} \mathrm{d}P$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{M(t)=n\}} [EM(t+u-r)]|_{r=s_n} \mathrm{d}\,P$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{M(t)=n\}} EM(u)\mathrm{d}\,P = EM(u).$$

所以$EM(t+u) \leqslant EM(t) + EM(u)$。证毕。

引理 8.6(Lorden(1970)) 设 $z_1, z_2, \cdots$是独立同分布随机变量列，

$$Ez_1 = \mu > 0, E(z_1^+)^2 < \infty,$$

$$s_n = \sum_1^n z_i \ (n \geqslant 1),$$

$$M(t) = \inf\{n:\ s_n \geqslant t\} \ \ (t \geqslant 0),$$

$$R(t) = s_{M(t)} - t,$$

则

$$\sup_{t \geq 0} ER(t) \leqslant \frac{1}{\mu} E(z_1^+)^2.$$

证明 首先设 $z_i \geqslant 0 (i \geqslant 1), c > 0$，则

$$\int_0^c R(t)\mathrm{d}\,t = \int_0^{s_{M(c)}} R(t)\mathrm{d}\,t - \int_c^{s_{M(c)}} R(t)\mathrm{d}\,t$$

$$= \sum_{i=1}^{M(c)} \int_{s_{i-1}}^{s_i} (s_i - t)\mathrm{d}\,t$$

$$- \int_c^{s_{M(c)}} (s_{M(t)} - t)\mathrm{d}\,t \quad (s_0 \equiv 0)$$

$$= \sum_{i=1}^{M(c)} s_i z_i - \frac{1}{2}(s_{M(c)})^2 - \frac{1}{2}(R(c))^2.$$

利用 Abel 变换知

$$\sum_{i=1}^{M(c)} s_i z_i = s_{M(c)}^2 + \sum_{i=1}^{M(c)-1} s_i(s_i - s_{i-1})$$

$$= s_{M(c)}^2 - \sum_{i=1}^{M(c)} s_i z_i + \sum_{i=1}^{M(c)} z_i^2,$$

故

$$\sum_{i=1}^{M(c)} s_i z_i = \frac{1}{2} s_{M(c)}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M(c)} z_i^2,$$

于是

$$\int_0^c R(t)\mathrm{d}\, t = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M(c)} z_i^2 - \frac{1}{2}(R(c))^2.$$

由 Fubini 定理及Wald 引理知

$$\int_0^c ER(t)\mathrm{d}\, t = \frac{1}{2} EM(c)\cdot Ez_1^2 - \frac{1}{2}E(R(c))^2,$$

$$Es_{M(c)} = EM(c)\cdot Ez_1,$$

故

$$EM(c) = \frac{1}{\mu}(c + ER(c)),$$

$$\int_0^c ER(t)\mathrm{d}\, t = \frac{1}{2} Ez_1^2\cdot\frac{c+ER(c)}{\mu} - \frac{1}{2}E(R(c))^2$$

$$\leqslant \frac{1}{2} Ez_1^2\cdot\frac{c+ER(c)}{\mu} - \frac{1}{2}(ER(c))^2.$$

根据引理 8.5 知

$$ER(t+u) = E[s_{M(t+u)} - (t+u)]$$

$$= \mu EM(t+u) - t - u$$

$$\leqslant ER(t) + ER(u).$$

于是

$$\frac{1}{2}CER(c)\leqslant\frac{C}{2}\inf_{0\leqslant t\leqslant\frac{C}{2}}\{ER(t)+ER(c-t)\}$$

$$\leqslant\int_0^{\frac{c}{2}}\{ER(t)+ER(c-t)\}\mathrm{d}\,t$$

$$=\int_0^c ER(t)\mathrm{d}\,t$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\,Ez_1^2\cdot\frac{c+ER(c)}{\mu}-\frac{1}{2}(ER(c))^2,$$

所以

$$(ER(c))^2+\left(c-\frac{1}{\mu}Ez_1^2\right)ER(c)-\frac{1}{\mu}cEz_1^2\leqslant 0,$$

$$(ER(c)+c)\left(ER(c)-\frac{1}{\mu}Ez_1^2\right)\leqslant 0,$$

从而

$$ER(c)\leqslant\frac{1}{\mu}Ez_1^2.$$

这就证明了当 $z_i\geqslant 0$ 时引理之结论成立。

以下研究 z_i 不一定非负的情形。令

$$\tau_1=\inf\{n;\ n\geqslant 1,s_n\geqslant 0\},$$

$$\tau_n=\inf\{k;\ k\geqslant 1,s_{\tau_{n-1}+k}\geqslant s_{\tau_{n-1}}\}\ (n>1),$$

$$y_1=s_{\tau_1},$$

$$y_n=s_{\tau_1+\cdots+\tau_n}-s_{\tau_1+\cdots+\tau_{n-1}}\ (n>1).$$

易知$\{y_n\}$是独立同分布随机变量列且 $y_n\geqslant 0$,

$$Ey_1=Es_{\tau_1}=E\tau_1\cdot Ez_1>0.$$

令

$$s_n^*=\sum_1^n y_i\ (n\geqslant 1),$$

$$M^*(t)=\inf\{n:\ s_n^*\geqslant t\},$$

$$R^*(t)=s^*_{M^*(t)}-t.$$

不难看出

$$s_{M(t)}=s^*_{M^*(t)}.$$

故

$$ER(t)=ER^*(t).$$

从本引理已证部分知

$$ER^*(t)\leqslant\frac{1}{Ey_1}Ey_1^2.$$

注意

$$Ey_1=E\tau_1\cdot\mu,$$

$$0\leqslant y_1=s_{\tau_1}\leqslant z_{\tau_1},$$

$$y_1^2\leqslant z_{\tau_1}^2\leqslant\sum_{i=1}^{\tau_1}(z_i^+)^2,$$

$$Ey_1^2\leqslant E\tau_1\cdot E(z_1^+)^2,$$

于是

$$ER(t)\leqslant\frac{1}{\mu}E(z_1^+)^2.$$

证毕。

引理 8.7 设 $\tilde{\theta}\in(\theta_1,\theta_2)$，$\tilde{\tau}(\tilde{\theta})$ 是 2-SPRT 的停时（见(8.6)），则对一切 $(\tau,d)\in\mathscr{F}(\alpha,\beta)$，有

$$E_{\tilde{\theta}}\tilde{\tau}(\tilde{\theta})-E_{\tilde{\theta}}\tau\leqslant\sum_{i=1}^{2}\left[a_i^2(\tilde{\theta})\sigma^2(\tilde{\theta})+1+\frac{\ln 2}{K(\tilde{\theta},\theta_i)}\right],\quad(8.17)$$

其中

$$a_i(\tilde{\theta})=\frac{\tilde{\theta}-\theta_i}{K(\tilde{\theta},\theta_i)},\quad i=1,2,$$

$$\sigma^2(\tilde{\theta})=\psi''(\tilde{\theta}),$$

$K(\theta,\varphi)$ 是 Kullback 信息数（见(8.8)）。

证明 令

$$\tau_1 = \inf\left\{n:\ \left(\frac{dP_{\tilde\theta}}{dP_{\theta_1}}\right)_n \geq \frac{1}{\alpha}\right\}, \tag{8.18}$$

$$\tau_2 = \inf\left\{n:\ \left(\frac{dP_{\tilde\theta}}{dP_{\theta_2}}\right)_n \geq \frac{1}{\beta}\right\}. \tag{8.19}$$

易知

$$\tilde\tau(\tilde\theta) = \min(\tau_1, \tau_2),$$

$$\tau_1 = \inf\left\{n:\ a_1(\tilde\theta)(s_n - n\psi(\tilde\theta)) + n \geq \frac{|\ln\alpha|}{K(\tilde\theta, \theta_1)}\right\},$$

$$\tau_2 = \inf\left\{n:\ a_2(\tilde\theta)(s_n - n\psi(\tilde\theta)) + n \geq \frac{|\ln\beta|}{K(\tilde\theta, \theta_2)}\right\},$$

其中 $s_n = \sum\limits_{1}^{n} x_i$。令

$$N_i = \min(\tau_i, \eta_i)\quad (i = 1, 2),$$

这里

$$\eta_i = \begin{cases} \tau, & 当\quad d \neq i, \\ \infty, & 当\quad d = i, \end{cases}\qquad i = 1, 2.$$

由于 η_i 是停时，故 N_i 也是停时。我们指出

$$\tilde\tau(\tilde\theta) - \tau \leq \sum_{i=1}^{2}(\tau_i - N_i). \tag{8.20}$$

实际上，当 $\tau = \infty$ 时，(8.20)显然成立，不妨设 $\tau < \infty$。

当 $d = 2$ 时，$\eta_1 = \tau$，故 $N_1 = \min(\tau_1, \eta_1) \leq \tau$，从而

$$\tilde\tau(\tilde\theta) - \tau \leq \tilde\tau(\tilde\theta) - N_1 \leq \tau_1 - N_1;$$

当 $d = 1$ 时，$\eta_2 = \tau$，知 $N_2 = \min(\tau_2, \tau) \leq \tau$，故

$$\tilde\tau(\tilde\theta) - \tau \leq \tau_2 - N_2.$$

总之(8.20)成立。

记

$$z_i = a_1(\tilde\theta)(x_i - \psi'(\tilde\theta)) + 1,\quad i \geq 1,$$

$$\xi_n = \sum_1^n z_i, \qquad n \geqslant 1,$$

则

$$\tau_1 = \inf\left\{n: \ \xi_n \geqslant \frac{|\ln\alpha|}{K(\tilde{\theta}, \theta_1)}\right\}.$$

从引理 8.6 知

$$E_{\tilde{\theta}}\left[\xi_{\tau_1} - \frac{|\ln\alpha|}{K(\tilde{\theta}, \theta_1)}\right] \leqslant \frac{1}{E_{\tilde{\theta}}\xi_1} E_{\tilde{\theta}}\xi_1^2.$$

由于$E_{\tilde{\theta}}\xi_1 = 1$，

$$E_{\tilde{\theta}}\xi_1^2 = E_{\tilde{\theta}}[a_1(\tilde{\theta})(x_1 - \psi'(\tilde{\theta})) + 1]^2$$

$$= a_1^2(\tilde{\theta})\sigma^2(\tilde{\theta}) + 1,$$

故

$$E_{\tilde{\theta}}\xi_{\tau_1} \leqslant \frac{|\ln\alpha|}{K(\tilde{\theta}, \theta_1)} + a_1^2(\tilde{\theta})\sigma^2(\tilde{\theta}) + 1.$$

利用 Wald 引理知

$$E_{\tilde{\theta}}\xi_{\tau_1} = E_{\tilde{\theta}}\tau_1 \cdot E_{\tilde{\theta}}\xi_1 = E_{\tilde{\theta}}\tau_1,$$

所以

$$E_{\tilde{\theta}}\tau_1 \leqslant \frac{|\ln\alpha|}{K(\tilde{\theta}, \theta_1)} + a_1^2(\tilde{\theta})\sigma^2(\tilde{\theta}) + 1. \qquad (8.21)$$

同理知

$$E_{\tilde{\theta}}\tau_2 \leqslant \frac{|\ln\beta|}{K(\tilde{\theta}, \theta_2)} + a_2^2(\tilde{\theta})\sigma^2(\tilde{\theta}) + 1. \qquad (8.22)$$

另一方面，可以证明

$$E_{\tilde{\theta}}N_1 \geqslant \frac{|\ln\alpha| - \ln 2}{K(\tilde{\theta}, \theta_1)}, \qquad (8.23)$$

$$E_{\tilde{\theta}}N_2 \geqslant \frac{|\ln\beta| - \ln 2}{K(\tilde{\theta}, \theta_1)}. \qquad (8.24)$$

实际上，

$$P_{\theta_1}(N_1 < \infty) = \int_{\{N_1<\infty\}} \left(\frac{\mathrm{d}P_{\theta_1}}{\mathrm{d}P_{\tilde\theta}}\right)_{N_1} \mathrm{d}P_{\tilde\theta}$$

$$= E_{\tilde\theta}\exp\{(\theta_1 - \tilde\theta)s_{N_1} - N_1(\psi(\theta_1) - \psi(\tilde\theta))\}$$

$$\geqslant \exp\{(\theta_1 - \tilde\theta)E_{\tilde\theta}N_1 \cdot E_{\tilde\theta}x_1 - E_{\tilde\theta}N_1(\psi(\theta_1) - \psi(\tilde\theta))\}$$

$$= \exp\{-K(\tilde\theta, \theta_1)E_{\tilde\theta}N_1\},$$

于是

$$E_{\tilde\theta}N_1 \geqslant \frac{-\ln P_{\theta_1}(N_1 < \infty)}{K(\tilde\theta, \theta_1)}.$$

由于

$$P_{\theta_1}(N_1 < \infty) \leqslant P_{\theta_1}(\tau_1 < \infty) + P_{\theta_1}(d = 2)$$

$$= \int_{\{\tau_1<\infty\}} \left(\frac{\mathrm{d}P_{\theta_1}}{\mathrm{d}P_{\tilde\theta}}\right)_{\tau_1} \mathrm{d}P_{\tilde\theta} + P_{\theta_1}(d = 2)$$

$$\leqslant \int_{\{\tau_1<\infty\}} a\mathrm{d}P_{\tilde\theta} + a \leqslant 2a,$$

故(8.23)成立。同理(8.24)成立。从(8.20)～(8.24)推出(8.17)成立。证毕。

定理 8.3 的证明　从引理8.7知，对任何$(\tau, d) \in \mathscr{F}(a, \beta)$，有

$$\sup_\theta E_\theta \tau \geqslant E_{\theta^*}\tau$$

$$\geqslant E_{\theta^*}\tau - \sum_{i=1}^{2}\left[a_i^2(\theta^*)\sigma^2(\theta^*) + 1 + \frac{\ln 2}{K(\theta^*, \theta_i)}\right],$$

故

$$n(a, \beta) \triangleq \inf\{\sup_\theta E_\theta\tau;\ (\tau, d) \in \mathscr{F}(a, \beta)\}$$

$$\geqslant E_{\theta^*}\tau - \sum_{i=1}^{2}\left[a_i^2(\theta^*)\sigma^2(\theta^*) + 1 + \frac{\ln 2}{K(\theta^*, \theta_i)}\right].$$

从引理 8.3 知

$$\hat{\tau} = \hat{\tau}(\theta^*) \leq t(\theta^*) + 1,$$

其中 $t(\theta^*)$ 之含义见(8.16)。

易知

$$t(\theta^*) - \tau_1 = \frac{-\ln\alpha}{K(\theta^*, \theta_1)} - \tau_1$$

$$\leq a_1(\theta^*)\,(s_{\tau_1} - \psi'(\theta^*)\tau_1),$$

$$t(\theta^*) - \tau_2 = \frac{-\ln\beta}{K(\theta^*, \theta_2)} - \tau_2$$

$$\leq a_2(\theta^*)\,(s_{\tau_2} - \psi'(\theta^*)\tau_2),$$

其中 τ_1, τ_2 之定义见 (8.18)，(8.19)。于是

$$t(\theta^*) - \hat{\tau} \leq \max(a_1(\theta^*)\tilde{s}_{\hat{\tau}}, a_2(\theta^*)\tilde{s}_{\hat{\tau}}),$$

其中

$$\tilde{s}_n = s_n - \psi'(\theta^*)n.$$

令

$$l(\theta^*) = a_1(\theta^*) - a_2(\theta^*),$$

则

$$E_{\theta^*}(t(\theta^*) - \hat{\tau})$$

$$\leq \frac{1}{2}(a_1(\theta^*) + a_2(\theta^*))E_{\theta^*}\tilde{s}_{\hat{\tau}} + \frac{1}{2}l(\theta^*)E_{\theta^*}|\tilde{s}_{\hat{\tau}}|$$

$$\leq \frac{1}{2}l(\theta^*)(E_{\theta^*}\tilde{s}^2_{\hat{\tau}})^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}l(\theta^*)(E_{\theta^*}\tilde{s}^2_1 \cdot E_{\theta^*}\hat{\tau})^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{2}l(\theta^*)\sigma(\theta^*)(t(\theta^*) + 1)^{\frac{1}{2}}.$$

由此推出

$$E_{\theta^*}\hat{\tau} \geq t(\theta^*) - \frac{1}{2}l(\theta^*)\sigma(\theta^*)(t(\theta^*) + 1)^{\frac{1}{2}},$$

$$n(\alpha, \beta) \geq t(\theta^*) - \frac{1}{2}l(\theta^*)\sigma(\theta^*)(t(\theta^*) + 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\left[a_i^2(\theta^*)\sigma^2(\theta^*)+1+\frac{\ln 2}{K(\theta^*,\theta_i)}\right].$$

另一方面，

$$\sup_\theta E_\theta \hat{\tau} \leqslant t(\theta^*)+1,$$

于是

$$1 \geqslant \frac{n(\alpha,\beta)}{\sup_\theta E_\theta \hat{\tau}}$$

$$\geqslant \frac{t(\theta^*)}{t(\theta^*)+1}-\frac{1}{2}t(\theta^*)\sigma(\theta^*)(t(\theta^*)+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{t(\theta^*)+1}\sum_{i=1}^{2}\left[a_i^2(\theta^*)\sigma^2(\theta^*)+1+\frac{\ln 2}{K(\theta^*,\theta_i)}\right].$$

由于 $\theta^* \in (\theta_1,\theta_2)$，知

$$\sigma^2(\theta^*) \leqslant \sup_{\theta_1<\theta<\theta_2} \sigma^2(\theta)=\sup_{\theta_1<\theta<\theta_2} \psi''(\theta)<\infty.$$

由于

$$\lim_{\theta\to\theta_1+0}\frac{(\theta-\theta_1)^2}{K(\theta,\theta_1)}=\frac{2}{\psi''(\theta_1)},$$

$$\lim_{\theta\to\theta_2-0}\frac{(\theta-\theta_2)^2}{K(\theta,\theta_2)}=\frac{2}{\psi''(\theta_2)},$$

知

$$\frac{a_1(\theta^*)}{\sqrt{t(\theta^*)}}=O(|\ln\alpha|^{-\frac{1}{2}})\quad(\alpha\to 0),$$

$$\frac{a_2(\theta^*)}{\sqrt{t(\theta^*)}}=O(|\ln\beta|^{-\frac{1}{2}})\quad(\beta\to 0).$$

由于

$$0<c_1\leqslant\frac{|\ln\alpha|}{|\ln\beta|}\leqslant c_2<\infty,$$

故

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{a_i(\theta^*)}{\sqrt{t(\theta^*)}}\right)^2=O(|\ln\delta|^{-\frac{1}{2}})\quad(\delta\to 0),$$

这里 $\delta=\max(\alpha,\beta)$。所以

$$1\geqslant\frac{n(\alpha,\beta)}{\sup\limits_{\theta}E_\theta\tau}\geqslant1-O(|\ln\delta|^{-\frac{1}{2}})\quad(\delta\to0),$$

更有

$$\lim_{\delta\to0}\frac{n(\alpha,\beta)}{\sup\limits_{\theta}E_\theta\tau}=1.$$

至此，定理8.3证毕。

例8.1（正态分布情形） 设 $x_1,x_2,\cdots$是独立同分布的，且 $X_1\sim N(\theta,1)$，θ 未知，$\theta\in(-\infty,\infty)$。研究检验问题：

$$H_1:\ \theta\leqslant\theta_1\longleftrightarrow H_2:\ \theta\geqslant\theta_2,$$

其中 $\theta_1<\theta_2$ 是两个已知数。

X_1 的分布密度为

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2\right\}$$

$$=\exp\left\{\theta x-\frac{1}{2}\theta^2\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\},$$

可见X关于某测度的密度为

$$\exp\left\{\theta x-\frac{1}{2}\theta^2\right\}.$$

从(8.3)和(8.8)知

$$\psi(\theta)=\frac{1}{2}\theta^2,\quad K(\theta,\varphi)=\frac{1}{2}(\theta-\varphi)^2.$$

若 $\alpha=\beta$，则从(8.16)知

$$\theta^*=\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2).$$

从(8.9)，(8.10)（取 $\tilde{\theta}=\theta^*$）知相应的 2-SPRT 为

$$\tau=\inf\{n:\ s_n\geqslant an+a_0\ 或\ s_n\leqslant bn+b_0\},$$

$$\hat{d}=\begin{cases}2, & \text{当 } \hat{\tau}<\infty \text{ 且 } s_{\hat{\tau}}\geqslant a\hat{\tau}+a_0,\\ 1, & \text{否则,}\end{cases}$$

这里

$$s_n=x_1+\cdots+x_n \quad (n\geqslant 1),$$

$$a=\frac{3\theta_1+\theta_2}{4},\quad a_0=\frac{2|\ln\alpha|}{\theta_2-\theta_1}=-b_0,\quad b=\frac{3\theta_2+\theta_1}{4}.$$

$\hat{d}=2$ 表示拒绝 H_1: $\theta\leqslant\theta_1$, $\hat{d}=1$ 表示接受 H_1。

例8.2（指数分布情形） 设 $x_1,x_2,\cdots$是独立同分布的随机变量列，x_1的分布密度为

$$f(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 λ 未知，$\lambda\in(0,\infty)$。研究检验问题：

$$H_1:\ \lambda\geqslant\lambda_1\longleftrightarrow H_2:\ \lambda\leqslant\lambda_2,$$

其中 $\lambda_1>\lambda_2>0$。令

$$\theta=-\lambda,\psi(\theta)=-\ln(-\theta),\theta_i=-\lambda_i \quad (i=1,2),$$

则

$$f(x,\lambda)=\exp\{\theta x-\psi(\theta)\} \quad (x>0).$$

所考虑的检验问题化为

$$H_1:\ \theta\leqslant\theta_1\longleftrightarrow H_2:\ \theta\geqslant\theta_2.$$

易知

$$K(\theta,\varphi)=\frac{\varphi}{\theta}-\ln\frac{\varphi}{\theta}-1.$$

若 $\alpha=\beta$，从(8.16)知

$$\theta^*=\frac{\theta_2-\theta_1}{\ln\dfrac{\theta_2}{\theta_1}}=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\ln\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

从(8.9),(8.10)(取 $\tilde{\theta}=\theta^*$)知相应的 2-SPRT 为

$$\hat{\tau}=\inf\{n:\ s_n\geqslant an+a_0 \text{ 或 } s_n\leqslant bn+b_0\},$$

$$\hat{d}=\begin{cases}2, & \text{当 } \hat{\tau}<\infty \text{ 且 } s_{\hat{\tau}}\geqslant a\hat{\tau}+a_0,\\ 1, & \text{否则},\end{cases}$$

这里

$$s_n=x_1+\cdots+x_n,$$

$$a=\frac{1}{\theta^*-\theta_1}\ln\frac{\theta_1}{\theta^*}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda^*}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda^*},$$

$$b=\frac{1}{\lambda_2-\lambda^*}\ln\frac{\lambda_2}{\lambda^*},$$

$$a_0=\frac{|\ln\alpha|}{\lambda_1-\lambda^*},\quad b_0=\frac{|\ln\beta|}{\lambda_2-\lambda^*},$$

$$\lambda^*=-\theta^*=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\ln\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}}.$$

$\hat{d}=2$ 表示拒绝 H_1，$\hat{d}=1$ 表示接受 H_1。

例8.3（贝努利分布情形） 设 $x_1,x_2,\cdots$是独立同分布的随机变量列，

$$P(x_1=1)=p=1-P(x_1=0)\quad(0<p<1).$$

研究检验问题：

$$H_1:\ p\leqslant p_1\longleftrightarrow H_2:\ p\geqslant p_2,$$

其中 $p_1<p_2$ 是两个已知值。

不难看出，x_1 的分布密度（关于某测度）为

$$\begin{aligned}f(x,p)&=p^x(1-p)^{1-x}(x=0,1)\\&=\exp\left\{x\ln\frac{p}{1-p}+\ln(1-p)\right\}\\&=\exp\{\theta x-\psi(\theta)\},\end{aligned}$$

其中

$$\theta=\ln\frac{p}{1-p},\quad \psi(\theta)=-\ln(1-p).$$

记

$$\theta_i = \ln\frac{p_i}{1-p_i} \quad (i=1,2),$$

所考虑的检验问题化为

$$H_1:\ \theta\leqslant\theta_1 \longleftrightarrow H_2:\ \theta\geqslant\theta_2.$$

易知

$$\psi(\theta) = \ln(1+e^{\theta}),$$

$$K(\theta,\varphi) = (\theta-\varphi)\ \frac{e}{1+e^{\theta}}\ -\ln\left(\frac{1+e^{\theta}}{1+e^{\varphi}}\right).$$

设 $\alpha=\beta$，从(8.16)知

$$\frac{e^{\theta^*}}{1+e^{\theta^*}} = \frac{1}{\theta_2-\theta_1}\ \ln\frac{1+e^{\theta_2}}{1+e^{\theta_1}}$$

$$= \frac{\ln\dfrac{1-p_1}{1-p_2}}{\ln\dfrac{1-p_1}{1-p_2}+\ln\dfrac{p_2}{p_1}}. \tag{8.25}$$

从(8.9)及(8.10)知，相应的 2-SPRT 为

$$\hat{\tau} = \inf\{n:\ s_n\geqslant an+a_0 \text{ 或 } s_n\leqslant bn+b_0\},$$

$$\hat{d} = \begin{cases} 2, & \text{当 } \hat{\tau}<\infty \text{ 且 } s_{\hat{\tau}}\geqslant a\hat{\tau}+a_0, \\ 1, & \text{否则}, \end{cases}$$

其中

$$s_n = x_1+\cdots+x_n,$$

$$a = \frac{\ln\dfrac{1-p_1}{1-p^*}}{\ln\dfrac{p^*}{p_1}+\ln\dfrac{1-p_1}{1-p^*}},$$

$$b = \frac{\ln\dfrac{1-p_2}{1-p^*}}{\ln\dfrac{p^*}{p_2}+\ln\dfrac{1-p_2}{1-p^*}},$$

$$a_0 = \frac{|\ln\alpha|}{\ln\frac{p^*}{p_1} + \ln\frac{1-p_1}{1-p^*}},$$

$$b_0 = \frac{|\ln\alpha|}{\ln\frac{p^*}{p_2} + \ln\frac{1-p_2}{1-p^*}},$$

其中 p^* 是等式(8.25)的右端。

$\hat{d}=2$ 表示拒绝 H_1，$\hat{d}=1$ 表示接受 H_1。

定理 8.2和定理8.3告诉我们，对一般的指数型分布 $f(x,\theta)$，2-SPRT 渐近地解决了 Kiefer-Weiss 问题。我们对此仍然不满足。是否有$(\hat{\tau},\hat{d})\in\mathscr{F}(\alpha,\beta)$，使得 $\alpha+\beta\to 0$ 时对一切 $\theta\in\Theta$，$E_\theta\hat{\tau}$ 渐近地最小？这个问题可以更确切地陈述如下。

从本章定理 4.5 (Hoeffding 不等式) 知，对一切 $(\tau,d)\in\mathscr{F}(\alpha,\beta)$，有

$$E_\theta\tau \geqslant \frac{1}{J(\theta)}\left\{\left[\left(\frac{t}{4}\right)^2 - J(\theta)\ln(\alpha+\beta)\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{t}{4}\right\}^2, \quad (8.26)$$

这里

$$J(\theta) = \max(K(\theta,\theta_1), K(\theta,\theta_2)),$$

$$t^2 = \int\left[\ln\frac{f(x,\theta_2)}{f(x,\theta_1)} - K(\theta,\theta_1) + K(\theta,\theta_2)\right]^2 f(x,\theta)\mathrm{d}\mu, \quad t>0,$$

$$f(x,\theta) = \exp\{\theta x - \psi(\theta)\}.$$

从(8.26)知

$$\lim_{\alpha+\beta\to 0}\frac{E_\theta\tau}{-\ln(\alpha+\beta)} \geqslant \frac{1}{J(\theta)} \text{ (一切 } \theta\text{)}. \quad (8.27)$$

问题是：是否有$(\tau,d)\in\mathscr{F}(\alpha,\beta)$，使得(8.27) 中等号成立？

陈家鼎(1992)给出了肯定的回答，这里不加证明地叙述他的结果。

仍记 $\Theta=(\underline{\theta},\bar{\theta})$，$-\infty\leqslant\underline{\theta}<\bar{\theta}\leqslant\infty$。设 $g(\theta)$，$\bar{g}(\theta)$ 分别是 $(\theta_1,\bar{\theta})$和$(\underline{\theta},\theta_2)$上的正值连续函数，满足

$$\int_{\theta_1}^{\bar{\theta}} g(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{\underline{\theta}}^{\theta_2} \bar{g}(\theta)\mathrm{d}\theta = 1.$$

令

$$\varphi_n = \int_{\theta_1}^{\bar{\theta}} \left(\frac{\mathrm{d}P_\theta}{\mathrm{d}P_{\theta_1}}\right)_n g(\theta)\mathrm{d}\theta \quad (n \geqslant 1),$$

$$\bar{\varphi}_n = \int_{\underline{\theta}}^{\theta_2} \left(\frac{\mathrm{d}P_\theta}{\mathrm{d}P_{\theta_2}}\right)_n \bar{g}(\theta)\mathrm{d}\theta \quad (n \geqslant 1),$$

这里

$$\left(\frac{\mathrm{d}P_\theta}{\mathrm{d}P_{\theta_i}}\right)_n = \exp\{(\theta-\theta_i)s_n - n(\psi(\theta)-\psi(\theta_i))\} \quad (i=1,2),$$

$$s_n = \sum_1^n x_i.$$

给定 $\alpha>0,\beta>0(\alpha-\beta<1)$，令

$$\tilde{\tau} = \inf\left\{n: \ \varphi_n \geqslant \frac{1}{\alpha} \ \text{或} \ \bar{\varphi}_n \geqslant \frac{1}{\beta}\right\},$$

$$\tilde{d} = \begin{cases} 2, & \text{当 } \tilde{\tau}<\infty \text{ 且 } \varphi_{\tilde{\tau}} \geqslant \dfrac{1}{\alpha}, \\ 1, & \text{否则.} \end{cases}$$

$\tilde{d}=2$表示拒绝H_1: $\theta\leqslant\theta_1$，$\tilde{d}=1$表示接受H_1. 则$(\tilde{\tau},\tilde{d})\in\mathscr{S}(\alpha,\beta)$且

$$\lim_{\substack{\alpha+\beta\to 0\\ \ln\alpha\sim\ln\beta}} \frac{E_\theta\tilde{\tau}}{-\ln(\alpha+\beta)} = \frac{1}{I(\theta)} \quad (\text{一切}\ \theta),$$

这里 $\ln\alpha\sim\ln\beta$ 表示

$$\lim_{\alpha+\beta\to 0} \frac{\ln\alpha}{\ln\beta} = 1.$$

于是可以推出

$$\lim_{\substack{\alpha+\beta\to 0\\ \ln\alpha\sim\ln\beta}} \frac{n(\alpha,\beta,\theta)}{E_\theta\tilde{\tau}} = 1 \quad (\text{一切}\ \theta),$$

其中

$$n(\alpha,\beta,\theta)=\inf\{E_\theta\tau;\ (\tau,d)\in\mathscr{F}(\alpha,\beta)\}.$$

这表明：对一切 θ，$E_\theta\tau$ 渐近地最小。

§9 相邻型假设的检验

对于相邻型假设(即零假设和对立假设的"距离"是0)的检验问题，一般说来在非序贯的检验类中不存在两类错误概率均任意小的检验，请看下面的例子。

例9.1 对于贝努里分布 $B(1,p)$ 的检验问题：

$$H_1:\ p<\frac{1}{2}\longleftrightarrow H_2:\ p>\frac{1}{2},$$

是否存在检验法，它的两类错误的概率均不超过给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$？

我们指出，不存在固定样本量的检验法满足所提的要求。

这从直观上看甚为明显。当总体的参数是 $p=\frac{1}{2}-\varepsilon$ 或 $\frac{1}{2}+\varepsilon$ (ε很小)时，要从样本分辨出 $p=\frac{1}{2}-\varepsilon$ 还是 $p=\frac{1}{2}+\varepsilon$ 是办不到的。数学证明如下：

设 $X_1,X_2,\cdots$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P_p)(0<p<1)$ 上的相互独立同分布的随机变量列，X_i 取值 0 或 1，且 $X_1\sim B(1,p)$。给定 $0<\alpha<\frac{1}{2}$ 及 $n\geq 1$。设 W 是样本量等于 n 的否定域且

$$\sup_{0<p<\frac{1}{2}}P_p((X_1,\cdots,X_n)\in W)\leq\alpha.$$

因为

$$P_p((X_1\cdots,X_n)\in W)=\sum_{(x_1,\cdots,x_n)\in W}p^{\sum_1^n x_i}(1-p)^{n-\sum_1^n x_i}$$

是 p 的连续函数(注意 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的可能值共有 2^n 个)，于是

$$\lim_{p\to\frac{1}{2}+0} P_p((X_1,\cdots,X_n)\in W^c)$$

$$= \lim_{p\to\frac{1}{2}-0} P_p((X_1,\cdots,X_n)\in W^c)$$

$$\geqslant 1-\alpha > \frac{1}{2} > \alpha,$$

这里 W^c 是 W 的余集。故采用否定域 W 犯第二类错误的概率不能一致地不大于 α。

下面将会看到，存在序贯检验法，其两类错误的概率均不超过给定的α，我们要证明更一般的(不限于贝努里分布)结论。

我们要用到概率论中下列已知的事实：

命题 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上相互独立同分布的随机变量列，$EX_1=0$，$EX_1^4<\infty$，$S_n=\sum_1^n X_i\ (n\geqslant 1)$，$\delta>0$，$\varepsilon>0$，则

$$\sum_{n=3}^{\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}(\ln n)^{\frac{1}{2}+\delta}}\right|\geqslant\varepsilon\right)<\infty. \tag{9.1}$$

这个命题的证明较长，请参阅 W.F.Stout(1974)。

设$\{F(x,\theta):\ \theta\in\langle\underline{\theta},\ \overline{\theta}\rangle\}$是随机增的分布族，$X_1, X_2, \cdots$ 是$(\Omega, \mathscr{F}, P_\theta)$上独立同分布的随机变量列，$X_1$的分布函数是$F(x,\theta)$。对于检验问题：

$$H_1:\ \theta\leqslant\theta_0 \longleftrightarrow H_2:\ \theta>\theta_0,$$

定义序贯方法(τ, d)如下：记

$$\mu(\theta)=E_\theta X_1=\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}F(x,\theta),$$

任意给定$\alpha\in(0,1)$，从(9,1)知只要ε取得足够大，有

$$\sum_{n=3}^{\infty} P_{\theta_0}\left(\left|\frac{S_n-n\mu(\theta_0)}{\sqrt{n}(\ln n)^{\frac{1}{2}+\delta}}\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\alpha.$$

令

$$a_n = n\mu(\theta_0) - \varepsilon\sqrt{n}\,(\ln n)^{\frac{1}{2}+\delta},$$

$$b_n = n\mu(\theta_0) + \varepsilon\sqrt{n}\,(\ln n)^{\frac{1}{2}+\delta},$$

则

$$\sum_{n=3}^{\infty} P_{\theta_0}(S_n \notin (a_n, b_n)) \leqslant \alpha.$$

令

$$\tau = \inf\{n:\ S_n \notin (a_n, b_n)\text{且}n \geqslant 3\},$$

$$d = \begin{cases} \text{接受}H_1, & \text{当}\tau < \infty\text{且 }S_\tau \leqslant a_\tau, \\ \text{拒绝}H_1, & \text{当}\tau < \infty\text{且 }S_\tau \geqslant b_\tau. \end{cases}$$

从定理 8.1 知 P_θ(拒绝H_1)是 θ 的增函数，从而

$$P_\theta(\text{拒绝 }H_1) \leqslant P_{\theta_0}(\tau < \infty) \quad (\theta \leqslant \theta_0);$$

$$P_\theta(\text{接受 }H_1) \leqslant P_{\theta_0}(\tau < \infty) \quad (\theta \geqslant \theta_0).$$

但是

$$P_{\theta_0}(\tau < \infty) \leqslant \sum_{n=3}^{\infty} P_{\theta_0}(S_n \in (a_n, b_n)) \leqslant \alpha,$$

所以两类错误概率都不超过 α。下面指出，对一切 $\theta \neq \theta_0$，

$$P_\theta(\tau < \infty) = 1 \quad \text{且} \quad E_\theta \tau < \infty.$$

令

$$\tau_1 = \inf\{n:\ n \geqslant 3\text{且}S_n \geqslant b_n\}, \quad \tau_2 = \inf\{n:\ n \geqslant 3\text{且}S_n \leqslant a_n\},$$

则

$$\tau = \min(\tau_1, \tau_2).$$

任意固定 $\theta > \theta_0$，取 $\rho \in (\mu(\theta_0), \mu(\theta))$，令

$$\tilde{\tau} = \inf\{n:\ n \geqslant 3\text{且}S_n - n\rho \geqslant 1\},$$

则存在 n_0 满足：$n \geqslant n_0$ 时，

$$b_n - n\rho = n\left(\frac{b_n}{n} - \rho\right) < 1.$$

易知 $\tau_1 \leqslant \tilde{\tau} + n_0$。由于 $E_\theta(X_1 - \rho) = \mu(\theta) - \rho > 0$，从定理 3.3 知 $E_\theta \tilde{\tau} < \infty$，从而 $E_\theta \tau_1 < \infty$ $(\theta > \theta_0)$。同理可证 $E_\theta \tau_2 < \infty (\theta < \theta_0)$。

所以 $E_\theta\tau<\infty$ $(\theta\neq\theta_0)$。当然 $E_{\theta_0}\tau=\infty$。

我们可进一步问，是否有功效是一的检验法——第一类错误的概率不超过 α 而第二类错误的概率是0？

结论是：如果 $E_{\theta_0}|X_1|^{2+\varepsilon}<\infty$（对某个 $\varepsilon>0$），则功效是一的检验法是存在的。

证明中要用到下列著名的概率论结论：

命题（Колмогоров-Feller准则） 设 $X_1,X_2,\cdots$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上独立同分布的随机变量列，$E|X_1|^{2+\varepsilon}<\infty$（对某个 $\varepsilon>0$），$EX_1=0$，$EX_1^2=\sigma^2$ $(\sigma>0)$，$\varphi(x)$ 是正的不减函数，则为了

$$P(S_n>\sigma\sqrt{n}\varphi(n),\ \text{i.o.})=0,$$

必须且只须

$$\int_1^\infty\frac{\varphi(t)}{t}e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)}\,dt<\infty,$$

这里 $S_n=\sum_1^n X_i$ $(n\geqslant1)$。

从这个命题知道，当 $C>\frac{3}{2}$ 时，

$$P(S_n>\sigma\sqrt{2n(\ln_2 n+C\ln_3 n)}\ \text{i.o.})=0,$$

这里及下面约定

$$\ln_2 n=\ln(\ln n),\quad \ln_3 n=\ln(\ln_2 n).$$

取定 $C>\frac{3}{2}$，记

$$b_n=n\mu(\theta_0)+\sigma\sqrt{2n(\ln_2 n+C\ln_3 n)},$$

这里 $\sigma>0$，$\sigma^2=E_{\theta_0}(X_1-E_{\theta_0}X_1)^2$。于是

$$P_{\theta_0}(S_n>b_n\ \text{i.o.})=0.$$

从而有 m 使得

$$P_{\theta_0}(\text{存在 } n\geqslant m \text{ 使得 } S_n>b_n)\leqslant\alpha. \tag{9.2}$$

我们假设 $\mu(\theta_0)$ 及 σ 是已知的。令

$$\tau = \inf\{n;\ n \geqslant m \text{ 且 } S_n > b_n\},$$

当 $\tau < \infty$ 时，拒绝 H_1: $\theta \leqslant \theta_0$；否则不拒绝 H_1。我们说这个检验法的第二类错误概率是0，第一类错误概率不超过 α。

实际上，任意给定 $\theta \leqslant \theta_0$，

$$P_\theta(\tau < \infty) \leqslant P_{\theta_0}(\text{存在 } n \geqslant m, \text{ 使得 } S_n > n\mu(\theta_0)$$

$$+ \sigma\sqrt{2n(\ln_2 n + C\ln_3 n)})$$

$$= P_{\theta_0}(\tau < \infty) \leqslant \alpha.$$

当 $\theta > \theta_0$ 时，

$$\lim_n \frac{S_n}{n} = \mu(\theta) > \mu(\theta_0) \quad (\text{a.s.} P_\theta),$$

故 $P_\theta(\tau < \infty) = 1$，从而检验的功效是一，而且，不难知道，

$$E_\theta \tau < \infty \quad (\theta > \theta_0).$$

能找到(9.2)中的m的明显表达式吗？一般是很难做到的，但是将 b_n 的定义适当修改后是可以做到的。为此需要利用Darling-Robbins 的重对数不等式(见下面的定理9.1)。

引理9.1 设$(Z_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1)$是非负上鞅，$b > 0$，则

$$P\{\text{存在 } n \geqslant m, \text{ 使得 } Z_n \geqslant b\}$$

$$\leqslant P(Z_m \geqslant b) + \frac{1}{b}\int_{\{Z_m < b\}} Z_m \mathrm{d}P \leqslant \frac{1}{b} E Z_m. \tag{9.3}$$

证明 令

$$\tau = \inf\{n;\ n \geqslant m,\ Z_n \geqslant b\},$$

则 τ 是停时。用归纳法易知

$$\int_{\{Z_m < b\}} Z_{\tau \wedge n} \mathrm{d}P \leqslant \int_{\{Z_m < b\}} Z_m \mathrm{d}P \quad (n \geqslant m),$$

于是

$$\int_{\{Z_m < b\}} I_{\{\tau < \infty\}} Z_{\tau \wedge n} \mathrm{d}P \leqslant \int_{\{Z_m < b\}} Z_m \mathrm{d}P.$$

令 $n \to \infty$,

$$P(Z_m<b,\ \tau<\infty)\leqslant\frac{1}{b}\int\limits_{\{Z_m<b\}}Z_m\mathrm{d}P,$$

从而

$$\begin{aligned}&P(\text{存在 } n\geqslant m \text{ 使得 } Z_n\geqslant b)\\&\quad=P(Z_m\geqslant b)+P(Z_m<b,\tau<\infty)\\&\quad\leqslant P(Z_m\geqslant b)+\frac{1}{b}\int\limits_{\{Z_m<b\}}Z_m\mathrm{d}P\\&\quad\leqslant\frac{1}{b}EZ_m.\end{aligned}$$

证毕。

定理 9.1(Darling-Robbins, 1967) 设 $X_1,X_2,\cdots$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上相互独立同分布随机变量列，$\varphi(t)\triangleq Ee^{tX_1}$ 在 $t=0$ 的邻域有限，$S_n=\sum\limits_1^n X_i$，$C_n\triangleq g(n)h(V_n)$，其中

$$g(n)=\sqrt{n}\cdot\sqrt{2\ln_2 n+6\ln_3 n+6\ln 2+2\ln A}\cdot e^{\frac{1}{2\ln_2 n}},$$

$$h(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{t^2}\ln\varphi(t),$$

$$V_n=t_i\triangleq\sqrt{\frac{2\ln i+4\ln_2 i+2\ln A}{m_i}}\quad(m_i\leqslant n<m_{i+1}),$$

$$m_i=e^{\frac{i}{\ln i}}\quad(i\geqslant 3),$$

则有不等式

$$P(\text{存在 } n\geqslant m,\ \text{使得 } S_n>C_n)<\frac{4}{A\ln_2 m}\quad(m\geqslant 20).$$

证明 令 $Z_n=e^{tS_n}/[\varphi(t)]^n$ $(n\geqslant 1)$，则 $(Z_n,n\geqslant 1)$ 是非负鞅且 $EZ_1=1$。从引理 9.1 知

$$P(\text{存在 } n\geqslant m,\ \text{使得 } Z_n\geqslant b)\leqslant\frac{1}{b}\quad(b>0).$$

令 $b=e^{\frac{m}{2}t^2}$ $(t>0)$，得到

$$P\left(\text{存在}n\geqslant m，\text{使得}S_n\geqslant\frac{mt}{2}+\frac{n}{t}\ln\varphi(t)\right)\leqslant e^{-\frac{m}{2}t^2}.$$

从 $h(t)$ 之定义知

$$P\left(\text{存在 }n\geqslant m，\text{使得}\frac{S_n}{n}\geqslant th(t)\right)\leqslant e^{-\frac{m}{2}t^2}.$$

故

$$P\left(\bigcup_{i=j}^{\infty}\bigcup_{m_i<n<m_{i+1}}\left\{\frac{S_n}{n}\geqslant t_i h(t_i)\right\}\right)\leqslant\sum_{i=i}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}m_i t_i^2}.$$

当 $m_i\leqslant n<m_{i+1}$ 时，

$$\ln i\leqslant\ln_2 n+\ln_3 n+\ln 2,$$

$$\ln_2 i\leqslant\ln_2 n，\ m_i>ne^{-\frac{1}{\ln_2 n}},$$

于是

$$V_n=t_i<[2\ln_2 n+6\ln_3 n+6\ln 2+2\ln A]^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2\ln_2 n}}=g(n)/n,$$

故

$$P(\text{存在 }n\geqslant m_j，\text{使得 }S_n>C_n)\leqslant\sum_{i=j}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}m_i t_i^2}$$

$$=\frac{1}{A}\sum_{i=j}^{\infty}\frac{1}{i(\ln i)^2}\leqslant\frac{1}{A}\int_{j-\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

$$=\frac{1}{A\ln\left(j-\frac{1}{2}\right)}\quad(j\geqslant 3).$$

设 $m\geqslant 20$，则有 $j\geqslant 3$ 满足 $m_j\leqslant m<m_{j+1}$。于是

$$\ln m<\frac{j+1}{\ln(j+1)}\leqslant\left(j-\frac{1}{2}\right)^4.$$

故

$$\ln_2 m<4\ln\left(j-\frac{1}{2}\right),$$

$$P(\text{存在 }n\geqslant m，\text{使 得 }S_n>C_n)<\frac{4}{A\ln_2 m}.$$

证毕。

如果 $\varphi(t)\leqslant e^{\frac{t^2}{2}}$，则 $h(t)\leqslant 1$，于是有

$$P(\text{存在 } n\geqslant m,\ \text{使得 } S_n>g(n))<\frac{4}{A\ln_2 m}. \tag{9.4}$$

特别，如果$X_1\sim N(0,1)$，则 $h(t)=1$； 如果 $X_1\sim B\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$（贝努里分布，参数是1/2），则 $h(t)\leqslant 1$。这两种情形(9.4)式均成立。

从定理9.1直接得到：

定理9.2 设 $X_1,X_2,\cdots$ 是$(\Omega,\mathscr{F},P_\theta)(\theta\in\langle\underline{\theta},\ \bar{\theta}\rangle)$上相互独立同分布的随机变量列，

$$F(x,\theta)=P_\theta(X_1\leqslant x),$$

$\{F(x,\theta)\}$是随机增的，$\varphi(t)\triangleq E_{\theta_0}e^{t(X_1-E_{\theta_0}X_1)}$ 在 t 的邻域有限。对给定的$\alpha\in(0,1)$，取 $A>0$ 及 $m\geqslant 20$，使得

$$\frac{4}{A\ln_2 m}\leqslant\alpha.$$

设 C_n 如定理 9.1 中所定义。令

$$\tau=\inf\{n:\ n\geqslant m,\ S_n>n\mu(\theta_0)+C_n\},$$

这里 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i\ (n\geqslant 1)$，$\mu(\theta_0)=E_{\theta_0}X_1$。当且仅当 $\tau<\infty$ 时拒绝假设 H_1：$\theta\leqslant\theta_0$（只要未停止观测就不拒绝 H_1）。则这样得到的检验法的功效是一而第一类错误的概率小于α。

证明 当$\theta\leqslant\theta_0$时，

$$P_\theta(\tau<\infty)\leqslant P_{\theta_0}(\tau<\infty)<\alpha,$$

故第一类错误的概率小于α。由于 $C_n=g(n)h(V_n)$，

$$h(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{t^2}\ln\varphi(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{t^2}$$

$\cdot \ln E_{\theta_0} e^{t(X_1 - E_{\theta_0} X_1)} \to \frac{1}{2} + \frac{1}{2} E_{\theta_0} (X_1 - E_{\theta_0} X_1)^2 \quad (t \to 0)$,

又 $V_n \to 0$，$\frac{1}{n} g(n) \to 0 \ (n \to \infty)$，故

$$\frac{C_n}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

由于 $\mu(\theta) > \mu(\theta_0)$ （$\theta > \theta_0$ 时），

$$\lim_{n} \frac{S_n}{n} = \mu(\theta) > \mu(\theta_0) \ (\text{a.s.} P_\theta),$$

从而 $P_\theta(\tau < \infty) = 1$。可见第二类错误的概率等于零。证毕。

例9.1 设 $X_1 \sim N(\theta, 1)$，$\theta_0 = 0$。考虑检验问题：

$$H_1: \theta \leqslant 0 \longleftrightarrow H_2: \theta > 0.$$

注意 $\ln \varphi(t) \equiv \frac{1}{2} t^2$。取 $A > 0$ 及 $m \geqslant 20$，满足

$$\frac{4}{A \ln_2 m} < \alpha.$$

令

$$\tau = \inf\{n: n \geqslant m, \ S_n > b_n\},$$

这里

$$b_n = \sqrt{n} \sqrt{2\ln_2 n + 6\ln_3 n + 6\ln 2 + 2\ln A} \cdot e^{\frac{1}{2\ln_2 n}}.$$

当且仅当 $\tau < \infty$ 时拒绝 H_1：$\theta \leqslant 0$。从定理 9.2知，这个检验法的功效是1，第一类错误的概率小于α。

例9.2 设 $X_1 \sim B(1, p)$（贝努里分布），$p_0 = \frac{1}{2}$。考虑检验问题

$$H_1: p \leqslant \frac{1}{2} \longleftrightarrow H_2: p > \frac{1}{2}.$$

注意

$$\varphi(t) = E_{\frac{1}{2}} e^{t(X_1 - \frac{1}{2})} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}\right) \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}, \quad h(t) \equiv 1.$$

取 $A>0$ 及 $m\geqslant 20$，满足

$$\frac{4}{A\ln_2 m}<\alpha,$$

令

$$\tau=\inf\{n:\ n\geqslant m,\ S_n>\frac{n}{2}+b_n\},$$

这里 b_n 的定义与例9.1中的一样。当且仅当 $\tau<\infty$ 时拒绝 H_1: $p\leqslant\frac{1}{2}$。从定理9.2知这个检验法的功效是1，第一类错误的概率小于 α。

例9.3 设 $X_1\sim B(1,p)$。对于检验问题

$$H_1:\ p<\frac{1}{2}\longleftrightarrow H_2:\ p>\frac{1}{2},$$

从前面的讨论知，存在两类错误的概率均任意小的检验法。利用重对数不等式可得到具体的形式。令

$$\tau=\inf\left\{n:\ n\geqslant m,\ \left|S_n-\frac{n}{2}\right|>b_n\right\},$$

这里 b_n 仍和例9.1中的一样。当 $S_\tau>\frac{\tau}{2}+b_\tau$ 时拒绝 H_1，当 $S_\tau<\frac{\tau}{2}-b_\tau$ 时接受 H_1，这里和例9.1一样，取 $A>0$ 及 $m\geqslant 20$，使得

$$\frac{4}{A\ln_2 m}<\alpha.$$

不难推知，这个检验法的两类错误的概率均小于给定的α。

以上讨论了单边假设的检验，现在来讨论下列问题：设

$$f(x,\theta)=\exp\{\theta x-\psi(\theta)\},\quad \theta\in\Theta=\langle\underline{\theta},\dot{\theta}\rangle,$$

如何解决检验问题：

$$H_1:\ \theta=\theta_0\longleftrightarrow H_2:\ \theta\neq\theta_0, \tag{9.5}$$

这里 θ_0 是 Θ 的内点。

我们指出，可用权函数方法给出功效是 1 的检验法。

设 $\Pi(\cdot)$ 是 Θ 之全体 Borel 子集上有定义的概率测度(叫做权函数)，令

$$q_n(x_1,\cdots,x_n)=\int_\Theta\prod_{i=1}^n f(x_i,\theta)\Pi(\mathrm{d}\theta),$$

$$f_n(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^n f(x_i,\theta_0)\quad(n\geqslant 1).$$

设 $X_1,X_2,\cdots$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P_\theta)(\theta\in\Theta)$ 上的独立同分布的随机变量列，X_1 的分布密度是 $f(x,\theta)$。令

$$\lambda_n=\frac{q_n(X_1,\cdots,X_n)}{f_n(X_1,\cdots,X_n)}\quad(n\geqslant 1),\tag{9.6}$$

$$\tau=\inf\left\{n:\ n\geqslant 1,\lambda_n\geqslant\frac{1}{\alpha}\right\}\quad(\alpha\in(0,1)).$$

当且仅当 $\tau<\infty$ 时拒绝 H_1: $\theta=\theta_0$。

可以证明(参看第三章)，如果权函数 $\Pi(\cdot)$ 在 Θ 的每个子区间上有正测度，则上述检验法的功效是 1，第一类错误的概率不超过 α。

例9.4 正态均值的检验。设

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}$$

(关于 Lebesgue 测度)，对于检验问题:

$$H_1:\ \theta=0\longleftrightarrow H_2:\ \theta\neq 0,$$

取权函数

$$\Pi(B)=\int_B\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}e^{-\frac{\gamma}{2}x^2}\mathrm{d}x\quad(\gamma>0),$$

根据公式(9.6)经过计算知

$$\lambda_n=\sqrt{\frac{r}{n+r}}\exp\{S_n^2/2(n+r)\}\quad(n\geqslant 1),$$

这里 $S_n=\sum_{1}^{n}X_i$。于是

$$\tau=\inf\left\{n:\ \lambda_n\geqslant\frac{1}{\alpha}\right\}=\inf\left\{n:\ n\geqslant 1,|S_n|\geqslant\sqrt{2(n+r)}\right.$$

$$\left.\cdot\left(-\ln\alpha-\frac{1}{2}\ln r+\frac{1}{2}\ln(n+r)\right)\right\}.$$

当且仅当 $\tau<\infty$ 时拒绝 H_1: $\theta=0$。这个检验法的功效是 1、第一类错误的概率不超过 α。

从以上的讨论可以看到，为了一个检验的功效是 1 需花很大的代价：样本量有时以正概率取无穷值。换句话说，按照我们的检验法，有时要不断观察下去，永无止境。这是所谓开放型的检验法。这种检验法既然不能保证在有限次观测后进行完毕，它的实用价值就引起了争论。许多统计学家认为它没有实用意义，但著名统计学家 H. Robbins 等人(1968)为它进行辩护，认为它有实用价值。本书著者认为 H.Robbins 等人的意见有道理。按照 H. Robbins 等人的观点，人们之所以怀疑开放型检验的价值，实在是由于历史形成的误会。在序贯分析的创始阶段，A.Wald 提出了著名的 SPRT，那是适应抽样验收问题的需要。当然，在验收问题中，必须有限步抽样完毕，然后作出接受或拒绝一批产品的决定。这种验收问题不允许验收者拖延不决，因而检验法不能是开放型的。但在一些质量管理或控制问题里，情况就不同了。以医学临床试验为例，假如有两种不同的处理(一个叫做 A，另一个叫做 B)，可以是治同一种病的两种药，也可以是两种治疗方法，要比较优劣。处理 A 是医院多年使用的，处理 B 则是新药或新方法。试验目的是：如果有足够的理由说明 B 比 A 好，则今后用 B 代替 A，若没有理由说明 B 比 A 好，仍使用 A。

每种处理施加病人后的反应用随机变量来刻画。对序贯而来的病人，交错地使用处理 A 和 B，用 $Y_1,Y_3,Y_5,\cdots$ 表示一列病人施加处理 A 产生的反应，用 $Y_2,Y_4,Y_6,\cdots$表示一列病人施加

处理B产生的反应。设$\{Y_i, i\geq 1\}$相互独立，$Y_1, Y_3, Y_5, \cdots$服从相同的分布$N(\mu_1, 1)$，$Y_2, Y_4, Y_6, \cdots$服从相同的分布$N(\mu_2, 1)$，假设均值越大表示处理的效果越好。问题化为比较μ_1, μ_2的大小。

令

$$X_i = Y_{2i} - Y_{2i-1} \ (i\geq 1), \qquad \mu = \mu_2 - \mu_1,$$

则$X_i \sim N(\mu, 2)$。考虑检验问题：

$$H_1: \ \mu\leq 0 \longleftrightarrow H_2: \ \mu > 0.$$

给定$\alpha\in(0,1)$，令

$$\tau = \inf\{n: \ n\geq m, \ S_n \geq \sqrt{2}\, b_n\},$$

这里$S_n = \sum_{1}^{n} X_i$，m和b_n的定义均和例9.1中的一样。当且仅当$\tau<\infty$时拒绝H_1: $\mu\leq 0$。换句话说，只要观测未终止就不拒绝"处理A"，即按多年来采用的处理行事。这种检验法正是医院工作者愿意采用的。

作为本章的结束语，我们特别指出，以上所讲的只是现代序贯检验理论的一部分，重点是SPRT的理论，许多重要方面(如含有讨厌参数的检验以及非参数情形的检验等等)都未提到。对于含有讨厌参数的某些特殊情形，我们将在第三章中进行论述。还需补充一点，在假设检验的研究中，从七十年代中期开始，所谓"重复的显著性检验"受到广泛的注意，现以单参数指数族分布为例，说明这种检验是怎样定义的。

设$X_1, X_2, \cdots$是$(\Omega, \mathscr{F}, P_\theta)$ $(\theta\in(\underline{\theta}, \bar{\theta}))$上的独立同分布随机变量列，$X_1$的分布密度是$f(x,\theta) = e^{\theta x - \psi(\theta)}$(关于某$\sigma$有限测度)。给定$\theta_0\in(\underline{\theta}, \bar{\theta})$，考虑检验问题：

$$H_1: \ \theta = \theta_0 \longleftrightarrow H_2: \ \theta\neq\theta_0$$

(对于检验问题H_1: $\theta\leq\theta_0 \longleftrightarrow H_2$: $\theta>\theta_0$可进行类似的讨论)。

设

$$\phi(y)=\sup_{\theta}\{(\theta-\theta_0)y-(\psi(\theta)-\psi(\theta_0))\},$$

$$\lambda_n=n\phi(\bar{X}_n),$$

这里 $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}X_i$。给定 $0<a\leqslant b<\infty$，$m\geqslant1$，$N>m$。令

$$t=\inf\{n:\ n\geqslant m,\ \lambda_n>b\},\qquad \tau=\min(t,N),$$

当且仅当 $\tau<N$ 或者 $\lambda_N>a$ 时拒绝 H_1：$\theta=\theta_0$。

这就是所谓的“重复显著性检验”，它的最大样本量是N。如何计算这种检验的两类错误的概率以及平均样本量，是很复杂的问题，有兴趣的读者可去看 Siegmund(1985)。

§10 补充与习题

(1) 设随机变量X有分布密度

$$f(x,\theta)=\frac{1-\theta^2}{2}e^{\theta x-|x|},\quad -\infty<x<\infty,$$

其中 θ 是未知参数，$\theta\in(-1,1)$。

研究检验问题：

$$H_1:\ \theta=-\frac{1}{2}\longleftrightarrow H_2:\ \theta=\frac{1}{2},$$

试写出SPRT的停止法则τ^*及判决法则d^*，并计算 oc 函数$L(\theta)$及平均样本量$E_\theta\tau^*$。

(2) 设 $z_1,z_2,\cdots$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上独立同分布的随机变量列，

$$P(z_1=0)<1,\quad Z_n=\sum_{1}^{n}z_i\ (n\geqslant1).$$

$$\tau^*=\inf\{n:\ Z_n\overline{\in}(a,b)\},\quad -\infty<a<0<b<\infty.$$

若对某个 t，$f(t)=Ee^{tz_1}<\infty$，试证明

$$E\left(\frac{e^{tZ_{\tau^*}}}{[f(t)]^{\tau^*}}\right)=1.$$

提示：利用本章引理 3.4 的证明过程中的符号和技巧，先证明

$$\lim_{q\to\infty}\int_{\{\tau^*>qm\}}\frac{e^{tZ_{qm}}}{[f(t)]^{qm}}\mathrm{d}P=0.$$

(3) 设 $z_1,z_2,\cdots$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的独立同分布随机变量列，$Ez_1=\mu\neq0$，$Ez_1^2<\infty$，

$$Z_n=\sum_1^n z_i\quad(n\geqslant1),$$

$$\tau^*=\inf\{n:\ Z_n\overline{\in}(a,b)\},\quad -\infty<a<0<b<\infty.$$

则

$$E\tau^*\leqslant\frac{b-\beta(b-a)}{\mu}+\frac{Ez_1^2}{\mu^2}\quad(\mu>0),\tag{10.1}$$

$$E\tau^*\leqslant\frac{-a-\alpha(b-a)}{-\mu}+\frac{Ez_1^2}{\mu^2}\quad(\mu<0),\tag{10.2}$$

其中

$$\beta=P(Z_{\tau^*}\leqslant a),\quad \alpha=P(Z_{\tau^*}\geqslant b).$$

证明如下：

(一) $\mu>0$的情形。

令

$$M(b)=\inf\{n:\ Z_n\geqslant b\},\quad R(b)=Z_{M(b)}-b,$$

则

$$\begin{aligned}EZ_{\tau^*}&=\int_{\{Z_{\tau^*}<a\}}Z_{\tau^*}\mathrm{d}P+\int_{\{Z_{\tau^*}\geqslant b\}}(Z_{M(b)}-b)\mathrm{d}P+bP(Z_{\tau^*}\geqslant b)\\&\leqslant aP(Z_{\tau^*}\leqslant a)+ER(b)+b(1-P(Z_{\tau^*}\leqslant a))\\&=a\beta+ER(b)+b(1-\beta).\end{aligned}$$

由引理8.6和

$$EZ_{\tau^*}=\mu E\tau^*$$

知

$$E\tau^* \leqslant \frac{a\beta + b(1-\beta)}{\mu} + \frac{1}{\mu}ER(b)$$

$$\leqslant \frac{b - \beta(b-a)}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}Ez_1^2.$$

（二）$\mu<0$的情形。

令

$$w_i = -z_i (i \geqslant 1), \qquad \tilde{Z}_n = \sum_1^n w_i,$$

则 $Ew_1 = -\mu > 0$且

$$\tau^* = \inf\{n;\ \tilde{Z}_n \bar{\in} (-b, -a)\}.$$

从$\mu>0$时的结果知

$$E\tau^* \leqslant \frac{-a-\beta^*(-a+b)}{Ew_1} + \frac{1}{(Ew_1)^2}Ew_1^2$$

$$= \frac{-a-\beta^*(b-a)}{-\mu} + \frac{1}{\mu^2}Ez_1^2,$$

这里

$$\beta^* = P(\tilde{Z}_{\tau^*} \leqslant -b) = P(Z_{\tau^*} \geqslant b) = \alpha.$$

(4) 设 $x_1, x_2, \cdots$是$(\Omega, \mathscr{F}, P_i)(i=1,2)$上 的独立同分布随机变量列，在$P_i$下$x_1$的分布密度为$f_i(x)$(关于某测度$\nu$)，测定

$$\nu(x;\ f_1 \neq f_2) > 0,$$
$$\{x;\ f_1(x)>0\} = \{x;\ f_2(x)>0\}.$$

研究检验问题：

H_1：f_1 是x_1的真正密度$\longleftrightarrow H_2$：f_2是x_1的真正密度。

设 $S(A,B) = (\tau^*, d^*)$是 SPRT，我们可给出平均样本量的上界：

$$E_1\tau^* \triangleq \int_\Omega \tau^* \mathrm{d}P_1 \leqslant \frac{-a-\alpha(b-a)}{-\mu_1} + \frac{E_1 z_1^2}{\mu_1^2}, \qquad (10.3)$$

$$E_2\tau^* \triangleq \int_\Omega \tau^* \mathrm{d}P_2 \leqslant \frac{b-\bar{\beta}(b-a)}{\mu_2}+\frac{E_2 z_1^2}{\mu_2^2}, \qquad (10.4)$$

其中

$$z_1=\ln\frac{f_2(x_1)}{f_1(x_1)},$$

$$a=\ln A,\quad b=\ln B,$$

$$\mu_i=E_i z_1,\quad i=1,2,$$

$$\bar{\alpha}=(1-\mathrm{e}^a)\exp\left\{-\frac{1}{1-\mathrm{e}^a}\cdot\frac{1}{\mu_2}E_2 z_1^2-b\right\},$$

$$\bar{\beta}=(1-\mathrm{e}^{-b})\exp\left\{-\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-b}}\cdot\frac{1}{(-\mu_1)}E_1 z_1^2+a\right\}.$$

证明如下。令

$$z_i=\ln\frac{f_2(x_i)}{f_1(x_i)}\ (i\geqslant 1),\quad Z_n=\sum_1^n z_i,$$

则

$$\tau^*=\inf\{n:\ Z_n\bar{\in}(a,b)\}.$$

易知 $\mu_2>0>\mu_1$。记

$$\alpha=P_1(Z_{\tau^*}\geqslant b),\quad \beta=P_2(Z_{\tau^*}\leqslant a),$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{1-\beta}&=E_2(\mathrm{e}^{-Z_{\tau^*}}\mid Z_{\tau^*}\geqslant b)\\&\geqslant\exp\{E_2(-Z_{\tau^*}\mid Z_{\tau^*}\geqslant b)\}\\&\geqslant\exp\{-E_2(Z_{\tau^*}-b\mid Z_{\tau^*}\geqslant b)-b\}\\&\geqslant\exp\left\{-\frac{1}{1-\beta}E_2R(b)-b\right\},\end{aligned}$$

这里

$$R(b)=Z_{M(b)}-b,$$

$$M(b)=\inf\{n:\ Z_n\geqslant b\}.$$

从引理8.6知

$$E_2R(b)\leqslant\frac{1}{\mu_2}E_2 z_1^2.$$

另一方面，

$$\beta = \int_{\{Z_{\tau^*} \leqslant a\}} e^{Z_{\tau^*}} dP_1 \leqslant e^a,$$

故

$$\alpha \geqslant (1 - e^a)\exp\left\{-\frac{1}{1-e^a} \cdot \frac{1}{\mu_2} E_2 z_1^2 - b\right\} = \boldsymbol{\alpha}.$$

再利用(10.2)即知(10.3)成立。

同理知(10.4)成立。

(5) 设 $x_1, x_2, \cdots$ 是$(\Omega, \mathscr{F}, P_\theta)$上独立同分布随机变量列，$x_1$的分布密度(关于某测度 ν)为

$$f(x, \theta) = \exp\{\theta x - \psi(\theta)\},$$

其中θ未知，$\theta \in (\underline{\theta}, \overline{\theta})$，$-\infty \leqslant \underline{\theta} < \overline{\theta} \leqslant \infty$。

研究检验问题：

$$H_1:\ \theta \leqslant \theta_1 \longleftrightarrow H_2:\ \theta \geqslant \theta_2,$$

这里 $\theta_1 < \theta_2$。

任意固定$\tilde{\theta} \in (\theta_1, \theta_2)$，$A \geqslant 1$，$B \geqslant 1$，令

$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\tilde{\theta}) = \inf\left\{n:\ \left(\frac{dP_{\tilde{\theta}}}{dP_{\theta_1}}\right)_n \geqslant A \text{ 或} \left(\frac{dP_{\tilde{\theta}}}{dP_{\theta_2}}\right)_n \geqslant B\right\},$$

$$\tilde{d} = \begin{cases} 2, & \text{当 } \tilde{\tau} < \infty \text{ 且} \left(\dfrac{dP_{\tilde{\theta}}}{dP_{\theta_1}}\right)_{\tilde{\tau}} \geqslant A, \\ 1, & \text{否则。} \end{cases}$$

$\tilde{d} = 2$表示拒绝 H_1，$\tilde{d} = 1$表示接受 H_1。

令

$$\alpha = \alpha(A, B) = \sup_{\theta \leqslant \theta_1} P_\theta(\tilde{d} = 2) \text{ (第一类错误概率)},$$

$$\beta = \beta(A, B) = \sup_{\theta \geqslant \theta_2} P_\theta(\tilde{d} = 1) \text{ (第二类错误概率)},$$

$$\mathscr{F}(\alpha, \beta) = \{(\tau, d):\ \sup_{\theta \leqslant \theta_1} P_\theta(d = 2) \leqslant \alpha,\ \sup_{\theta \geqslant \theta_1} P_\theta(d = 1) \leqslant \beta\},$$

$$n(A, B) = \inf\{E_{\tilde{\theta}}\tau:\ (\tau, d) \in \mathscr{F}(\alpha, \beta)\},$$

其中(τ,d)表示序贯检验。

不难推知，

$$(\tilde{\tau},\tilde{d})\in\mathscr{F}(A^{-1},B^{-1}).$$

还可以证明

$$E_{\tilde{\theta}}\tilde{\tau}-n(A,B)\to 0\ (\text{当}A+B\to\infty\text{时}).$$

这是Lorden(1976)的更一般的定理的特殊情形，详细证明见Lorden 的 原文。

(6) 设$x_1,x_2,\cdots$是$(\Omega,\mathscr{F},P_\theta)$上独立同分布随机变量列，$x_1$的分布密度是

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\theta\in(0,\infty)$。

对于检验问题

$$H_1:\ \theta\geqslant\theta_1\longleftrightarrow H_2:\ \theta\leqslant\theta_2\ (\theta_1>\theta_2)$$

采用SPRT(τ^*,d^*)，其中

$$\tau^*=\inf\{n:\ \lambda_n\overline{\in}(A,B)\},$$

$$d^*=1+I(\tau^*<\infty,\ \lambda_{\tau^*}\geqslant B),$$

$$\lambda_n=\prod_{i=1}^{n}\frac{f(x_i,\theta_2)}{f(x_i,\theta_1)}\ (n\geqslant 1),$$

$d^*=2$表示拒绝H_1，$d^*=1$表示接受H_1。

$$0<A<1<B<\infty.$$

试利用§6中的方法给出这个检验法的OC函数和平均样本量的精细估计。

(7) 设$x_1,x_2,\cdots$是独立同分布随机变量列，$x_1\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ未知。研究检验问题：

$$H_1:\ \frac{\mu}{\sigma}=\gamma_1\longleftrightarrow H_2:\ \frac{\mu}{\sigma}=\gamma_2,$$

其中 $\gamma_1<\gamma_2$ 是两个已知数。

我们可利用“不变性原理”导出“序贯 t 检验”。

考虑变换 g_c：

$$(x_1,\cdots,x_n)\to(cx_1,\cdots,cx_n)\ \ (c>0).$$

易知

$$Z_n=\left(\frac{x_1}{|x_1|},\frac{x_2}{|x_1|},\cdots,\frac{x_n}{|x_1|}\right)$$

是变换群 $\{g_c,c>0\}$ 下的极大不变量。用 $m(A)$ 表示 Lebesgue 测度，ν_1 表示计数测度：

$$\nu_1(B)=\text{集合}B\cap\{-1,1\}\text{的元素个数}.$$

可以证明(见第三章)，Z_n 关于乘积测度 $\nu_1\times m\times\cdots\times m$ 的密度为

$$q_\gamma(u_1,\cdots,u_n)=\int_0^\infty\prod_{i=1}^n\left[\frac{1}{u}g\left(\frac{u_i}{u}-\gamma\right)\right]\frac{1}{u}\mathrm{d}u,$$

其中

$$\gamma=\frac{\mu}{\sigma},\ \ g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

易知

$$q_\gamma(Z_n)=\int_0^\infty u^{-1}\exp\{nf(u,T_n,\gamma)\}\mathrm{d}u,$$

其中

$$f(u,y,\gamma)=-\frac{1}{2}u^2+\gamma yu+\ln u-\frac{1}{2}\gamma^2,$$

$$T_n=\frac{\bar{x}_n}{\left(n^{-1}\sum_1^n x_i^2\right)^{1/2}},\ \ \bar{x}_n=\frac{1}{n}\sum_1^n x_i.$$

给定 $0<A<B<\infty$，令

$$R_n=\frac{q_{\gamma_2}(Z_n)}{q_{\gamma_1}(Z_n)},$$

$$\tau=\inf\{n:\ R_n\overline{\in}(A,B)\},$$

$$\tilde{d} = 1 + I(\tilde{\tau} < \infty, R_{\tilde{\tau}} \geq B),$$

$(\tilde{\tau}, \tilde{d})$便是所谓序贯 t 检验，$\tilde{\tau}$是停止法则，$\tilde{d}$是判决法则，$\tilde{d}=2$ 表示拒绝 H_1，$\tilde{d}=1$ 表示接受 H_1。

序贯 t 检验的性质比较复杂，参看 Lai(1981)。

(8) 本章前面介绍的序贯方法(如SPRT，2-SPRT等)虽然在节省样本量上颇有优越性，但是在某些情况下却难以实行。按照所述序贯方法的定义，是否要进行第 n 次抽样(或观测)完全依赖于前$n-1$次抽样(或观测)的结果。如果得到一个抽样(或观测)数据花费的时间很长，则两次抽样之间的等待时间很长，从而序贯方法的实施过程将花费太长的时间而为实际工作所不允许。这种情形在医学临床试验中常见。

由此可见，为了使得统计方法的样本量小而且实施时所用的时间比较短，应该考虑在进行抽样和观测时允许“平行作业”——对某些“个体”同时观测。基于这种考虑，所谓“分组序贯方法”(Group Sequential method)从 70 年代起受到广泛的注意，并成功地用于实际工作中。

我们举一例子说明这种方法的特点。

在某医学临床试验中要比较两种处理(例如治疗同一种病的两种药)的效果是否相同，设处理 A 与处理 B 分别施加于病人后的结果是 x_A, x_B。假定

$$x_A \sim N(\mu_A, \sigma^2), \quad x_B \sim N(\mu_B, \sigma^2),$$

这里 μ_A, μ_B 是未知的，σ^2是已知的。

考虑检验问题：

$$H_0: \mu_A = \mu_B \longleftrightarrow H_1: \mu_A \neq \mu_B.$$

我们采用如下的检验方法：将病人分成N组(通常N是较小的整数)，每组$2n$个人，其中 n 个人采用处理A，另外 n 个人采用处理B。第 j 组$(1 \leq j \leq N)$中处理A和处理B分别对应的数据为

$$x_{Aj1}, x_{Aj2}, \cdots, x_{Ajn},$$

$$x_{Bj1}, x_{Bj2}, \cdots, x_{Bjn}.$$

令

$$\bar{x}_{Aj} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{Aji}, \quad \bar{x}_{Bj} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{Bji},$$

$$d_j = \bar{x}_{Aj} - \bar{x}_{Bj}, \quad \bar{d}_j = \frac{1}{j}\sum_{K=1}^{j} d_K \quad (1 \leqslant j \leqslant N).$$

假设原始数据是分别独立观测得到的，于是

$$\bar{d}_j \sim N\left(\theta, \frac{2\sigma^2}{jn}\right), \quad j = 1, \cdots, N,$$

其中

$$\theta = \mu_A - \mu_B.$$

设$c_1, c_2, \cdots, c_N$是N个常数，令

$$\tau = \min\left\{j: |\bar{d}_j|\sqrt{\frac{jn}{2\sigma^2}} \geqslant c_j \text{ 或 } j = N\right\},$$

$$d = \begin{cases} 1, & \text{当 } |\bar{d}_\tau|\sqrt{\frac{\tau n}{2\sigma^2}} \geqslant c_\tau, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

这里τ是停止法则，d是判决法则，$d=1$表示拒绝H_0，$d=0$表示接受H_0，(τ, d)便是所谓“分组序贯检验”。

怎样确定$c_1, c_2, \cdots, c_N$及n呢？这应由检验水平α及对检验的功效提出的要求来确定。

为简单计，设$c_1 = c_2 = \cdots = c_N = c$，给定$N$及检验水平$\alpha$后，$c$应满足

$$\begin{aligned}
\alpha &= p(d=1 \mid \theta = 0) \\
&= 1 - p\left(\left|\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} d_k \sqrt{\frac{jn}{2\sigma^2}}\right| < c, \ j = 1, \cdots, N \mid \theta = 0\right) \\
&= 1 - \int_D \cdots \int \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N e^{-\frac{1}{2}\sum_1^N x_i^2} dx_1 \cdots dx_N,
\end{aligned}$$

其中

$$D=\left\{(x_1,\cdots,x_N):\ \left|\frac{1}{\sqrt{j}}\sum_{k=1}^{j}x_k\right|<c,\ j=1,\cdots,N\right\}.$$

利用数值积分可确定出 $c=c(N,\alpha)$。

若要求所述检验在 $\theta=\theta_1$ 时的功效为 $1-\beta$，则

$$\begin{aligned}1-\beta &= P(d=0\mid\theta=\theta_1)\\ &= P\left(\left|\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}d_k\sqrt{\frac{jn}{2\sigma^2}}\right|<c,\ j=1,\cdots,N\ \theta=\theta_1\right)\\ &= P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{j}}\sum_{k=1}^{j}(d_k-\theta_1)\sqrt{\frac{n}{2\sigma^2}}+\sqrt{j}\,\Delta\right|<c,\right.\\ &\qquad\left. j=1,\cdots,N\mid\theta=\theta_1\right)\\ &= \int_{D_1}\cdots\int\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N e^{-\frac{1}{2}\sum_{1}^{N}x_k^2}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N,\end{aligned}$$

其中

$$\Delta=\theta_1\sqrt{\frac{n}{2\sigma^2}},$$

$$D_1=\left\{(x_1,\cdots,x_N):\ \left|\frac{1}{\sqrt{j}}\sum_{k=1}^{j}(x_k+\Delta)\right|<c,\ j=1,\cdots,N\right\}.$$

根据N,α,β及 $c=c(N,\alpha)$，利用数值积分可确定出$\Delta=\Delta(N,\alpha,\beta)$，从而可求出

$$n=2\sigma^2\left(\frac{\Delta}{\theta_1}\right)^2.$$

c 及 Δ 的数值均有表可查，参看 Pocock(1977)。例如 $N=4$，$\alpha=0.05,\beta=0.10$时，$c=2.36$，$\Delta=1.763$。关于分组序贯方法的一般知识，参看 Ghosh and Sen(1991)的第12章。

(9) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是$(\Omega,\mathscr{F},P_\theta)$上独立同分布的随机变量

$$P_\theta(x_1 \leqslant x) = 1 - \exp\left\{-\frac{1}{\theta}x\right\} \quad (x>0, \theta>0),$$

且

研究检验问题：

$$H_0:\ \theta\leqslant\theta_0 \longleftrightarrow H_1:\ \theta>\theta_0.$$

给定 $0<\alpha<1$，设 $\gamma(n,\alpha)$满足

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\gamma(n,\alpha)} u^{n-1}e^{-u}du = 1-\alpha.$$

采用检验法 d：当且仅当$\sum_1^n x_i \geqslant \theta_0\gamma(n,\alpha)$时拒绝$H_0$。

从Neyman-Pearson理论知，检验法 d 是检验水平为 α 的一致最大功效的检验法。值得注意的是，在上面叙述的检验法中需要知道$x_1,\cdots,x_n$这 n 个数据。在寿命试验与生存分析中 x_i表示寿命（或生存时间），要获得这些数据常常在时间上或经济上花费较大的代价。为了节省时间（或经费），可采用下列时间序贯方法（Time-sequential method）。

对 n 个产品（寿命分别为 $x_1,\cdots,x_n$）同时开始进行寿命试验，直到下列时刻τ_0为止。

$$\tau_0 = \inf\left\{t:\ \sum_{i=1}^n \min(x_i,t) \geqslant \theta_0\gamma(n,\alpha)\text{或}t=\max(x_1,\cdots,x_n)\right\}.$$

要注意的是，$x_1,\cdots,x_n$ 的值不一定能观测得到，但对任何 $t\geqslant0$，可观测到下列数据：

$$\min(x_i,t),\quad I(x_i\leqslant t)\quad (i=1,\cdots,n),$$

这里I_A是集合 A 的示性函数。从而τ_0 的值和

$$S_{\tau_0} \triangleq \sum_{i=1}^n \min(x_i,\tau_0)$$

的值可观测得到。

我们采用检验法$\tilde{d}$：当且仅当$S_{\tau_0}\geqslant\theta_0\gamma(n,\alpha)$时拒绝$H_0$。

不难验证：$\bar{d}$ 与前面的 d 有相同的检验水平与相同的功效函数，但各产品的试验时间的总和 S_{τ_0} 永远不超过各产品的寿命的总和$\sum^{n} x_i$。这种时间序贯方法从八十年代开始受到越来越广泛的注意，参看 Ghosh and Sen(1991)的第27章。

(10) 本章中的许多概念和结果可推广到指数型的随机过程的参数检验上去。

若$(x_t, t\geqslant 0)$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P_\theta)(\theta\in\Theta)$上取值于$E$的右连续齐次独立增量过程，其中$\theta$是未知参数，$\Theta=(\underline{\theta}, \bar{\theta})$，$-\infty\leqslant\underline{\theta}<\bar{\theta}\leqslant\infty$，$E\subset(-\infty,\infty)$，$P_\theta(x_0=0)=1$且对任何$t>0$，$x_t$关于某测度$\nu_t$的分布密度是

$$p(t,x,\theta)=\exp\{\theta x-t\psi(\theta)\}\quad(x\in E),$$

则称$(x_t, t\geqslant 0)$是指数型的随机过程。

齐次Poisson过程和Wiener过程都是指数型的随机过程。

研究检验问题：

$$H_1:\ \theta\leqslant\theta_1\longleftrightarrow H_2:\ \theta\geqslant\theta_2,$$

其中 $\theta_1<\theta_2$ 是两个已知的参数值。

令

$$\mathscr{F}_t=\sigma(x_u;0\leqslant u\leqslant t)\quad(t\geqslant 0),$$

可以证明，在$\mathscr{F}_t$上测度P_{θ_2}对P_{θ_1}的 Radon-Nikodym 导数为

$$\lambda_t=\exp\{(\theta_2-\theta_1)x_t-t(\psi(\theta_2)-\psi(\theta_1))\}.$$

给定$0<A<1<B<\infty$，令

$$\tau^*=\inf\{t:\ \lambda_t\bar{\in}(A,B)\},$$

$$d^*=\begin{cases}1, & \text{当}\tau^*<\infty\text{且}\lambda_{\tau^*}\leqslant A,\\ 2, & \text{否则},\end{cases}$$

(τ^*, d^*)就是连续时间情形的SPRT，其中 τ^*是停止法则，d^*是判决法则，$d^*=2$表示拒绝 H_1，$d^*=1$ 表示接受 H_1。

对于这个SPRT以及2-SPRT 等检验法，现代已有许多研究，参看 Irle and Schmitz(1984)及陈家鼎(1987,1989,1990,1992)。

第三章　序贯估计

§1　引言、无偏估计

序贯估计就是用序贯方法估计总体的特性值(比如估计总体所含的未知参数的值，估计参数的函数的值等等)。与序贯检验相类似，它的重要性也是在两个方面：一方面，序贯估计在许多情况下比起非序贯估计(即固定样本量情形下的估计)来有较高的效率，即为了达到同样的估计精度，序贯方法所需的(平均)样本量要小些；另一方面，在某些情况下不存在非序贯的估计满足所提的要求，但有序贯估计合乎要求。这后一方面告诉我们，序贯估计是不可少的。

序贯估计包含序贯点估计与序贯区间估计两种。序贯估计的理论和方法从五十年代以来有很大的发展，研究的问题很多，方法也多种多样，但应该指出，尚缺乏统一的方法和理论，序贯估计的研究尚未达到成熟的阶段(贝叶斯估计的情况要好些，第四章将有论述)。本章不企图对序贯估计作最一般的理论概括，而是针对一些常见的分布及一些具体问题叙述序贯估计的方法和理论。希望读者通过这些特殊问题的解决掌握序贯估计的基础知识与研究特点。

本章的许多问题可归结为下列数学模式：

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P_\theta)(\theta \in \Theta)$ 上的相互独立同分布的随机变量列，这里

$$\Theta = \langle a, b \rangle \times G, \qquad -\infty \leqslant a < b \leqslant \infty,$$

G 是一非空集合，G 中的元叫做讨厌参数。当 G 恰由一个已知元素组成时，Θ 变成了单参数集。显然

$$\Theta=\{(\mu,\zeta):\ \mu\in\langle a,b\rangle,\zeta\in G\}。$$

我们特别关心下列问题：

1）找出 μ（更一般地，(μ,ζ)的函数 $g(\mu,\zeta)$）的优良的点估计值，特别是相对误差一致小的估计值。

2）找出 μ（更一般地，$g(\mu,\zeta)$）的固定宽度的置信区间。

一般说来，每个序贯估计法包含两个组成部分，一个是停止法则——告诉我们什么时候停止观测（或抽样），这常用序列$\{X_n,n\geqslant1\}$ 的停时 τ 来表示；另一个是估计法则——它告诉我们，根据观测值（样本值）如何确定被估的量的估计值，这常用函数 $d=d(X_1,\cdots,X_\tau)$来表示（d的值是实数或区间）。

当然，还有许多问题不能纳入上述模式，只好具体问题具体分析了（见本章§4 和§5）。

在使用序贯方法时，观测费用是要考虑的。本章不引进费用函数的概念（在第四章中要专门论述它），但要求序贯方法的平均样本量小，这实际上也是要求观测的总费用小。

读者从初等统计书中已知，估计值的优良性的标准有好多种，最简单的一种是无偏性，对序贯估计也可以定义无偏性。本节的剩下部分就是讨论“无偏性”的定义及有关的性质。

以下设 $g(\theta)$是 Θ 上的实值函数，τ 是序列$\{X_n,n\geqslant1\}$的停时，$d(\omega)$是$(\Omega_\tau,\mathscr{F}_\tau)$上的实值可测函数，这里

$$\Omega_\tau=\{\omega:\ \tau(\omega)<\infty\},$$

$$\mathscr{F}_\tau=\{E:\ E\subset\Omega_\tau,\text{对一切}n\geqslant1,E\cap\{\tau=n\}\in\sigma(X_1,\cdots,X_n)\}①。$$

定义1.1 称 $d=d(\omega)$ 是 $g(\theta)$的无偏估计，如果 $E_\theta d=g(\theta)$（一切 $\theta\in\Theta$）。

大家知道，在固定样本量情形下，无偏估计的方差有确定的下界。著名的 Rao-Cramer 不等式就提供了这种下界。Wolfowitz (1947)将这个不等式推广到序贯估计的情形。

① 更一般地，我们允许 τ 取值0，即允许不进行任何观测，但要求 $\tau\equiv0$ 或者恒大于0。

定理1.1 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P_\theta)$ $(\theta \in (a,b))$ 上的独立同分布的随机变量列，X_1 的分布密度是 $f(x,\theta)$（关于 σ 有限测度 μ），$g(\theta)$ 是连续可微函数，τ 是停时，$\hat{g} = d(X_1, \cdots, X_\tau)$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计。假定下列条件满足

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x,\theta)}{\partial \theta} \mathrm{d}\mu = 0$;

(2) $I(\theta) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta} \right)^2 f(x,\theta) \mathrm{d}\mu > 0$;

(3) 对任何 $n \geqslant 1$ 及 n 维 Borel 集 B_n，函数

$$g_n(\theta) \triangleq \int_{B_n} \mathrm{d}(x_1, \cdots, x_n) \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) \mathrm{d}\mu^n$$

可以积分号下求微商而且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n'(\theta)$ 在 (a,b) 上一致收敛，则必有结论：

$$E_\theta(\hat{g} - g(\theta))^2 \geqslant \frac{(g'(\theta))^2}{E_\theta \tau \cdot I(\theta)}. \tag{1.1}$$

证明 不妨设 $E_\theta \tau < \infty$ 且 $E_\theta(\hat{g} - g(\theta))^2 < \infty$（否则，(1.1)是显然成立的）。当然，有 n 维 Borel 集 B_n 满足：

$$\{\tau = n\} = \{(X_1, \cdots, X_n) \in B_n\} \quad (n \geqslant 1).$$

于是

$$g(\theta) = E_\theta \hat{g} = E_\theta\, \mathrm{d}(X_1, \cdots, X_\tau)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} \mathrm{d}(x_1, \cdots, x_n) \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) \mathrm{d}\mu^n.$$

故

$$g'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} \mathrm{d}(x_1, \cdots, x_n) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) \right) \mathrm{d}\mu^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} \mathrm{d}(x_1, \cdots, x_n) \sum_{1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta} (\ln f(x_i, \theta))$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)\mathrm{d}\mu^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\{\tau=n\}} \mathrm{d}(X_1,\cdots,X_n)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}(\ln f(X_i,\theta))P_\theta(\mathrm{d}\omega)$$

$$= E_\theta\left(\hat{g}\sum_{i=1}^{\tau}\frac{\partial}{\partial\theta}(\ln f(X_i,\theta))\right).$$

利用 Wald 引理(第二章定理 3.1)知

$$E_\theta\left(\sum_{i=1}^{\tau}\frac{\partial}{\partial\theta}(\ln f(X_i,\theta))\right)$$

$$= E_\theta\tau\cdot E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\ln f(X_1,\theta))\right)$$

$$= E_\theta\tau\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f(x,\theta)}{\partial\theta}\mathrm{d}\mu = 0,$$

于是

$$[g'(\theta)]^2 \leqslant E_\theta\left[(\hat{g}(\theta)-g(\theta))\cdot\sum_{1}^{\tau}\frac{\partial}{\partial\theta}(\ln f(X_i,\theta))\right]^2$$

$$\leqslant E_\theta(\hat{g}-g)^2\cdot E_\theta\tau\cdot E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X_1,\theta)\right)^2$$

$$= E_\theta(\hat{g}-g)^2\cdot E_\theta\tau\cdot I(\theta).$$

由此立即得到不等式(1.1)。证毕。

设总体X的分布函数是$F(x,\theta)$，若$X_1,\cdots,X_n$是X的样本，当然$\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}X_i$是均值$g(\theta)=E_\theta X$的无偏估计。如果$\tau$是$\{X_n\}$的有限停时，是否$\bar{X}_\tau=\frac{1}{\tau}\sum_{1}^{\tau}X_i$也是均值的无偏估计呢？答案是：不一定。

例1.1 设$X_1,X_2,\cdots$是$(\Omega,\mathscr{F},P_\theta)$ $(0<\theta<1)$上的独立同分布随机变量列，X_1服从贝努里分布，

$$P_\theta(X_1=1)=\theta=1-P_\theta(X_1=0).$$

令 $\tau=\inf\{n:\ n\geq 1, X_n=1\}$。易知 $P_\theta(\tau<\infty)=1$。样本均值 $\bar{X}_\tau=\frac{1}{\tau}$，

$$E_\theta\bar{X}_\tau=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P_\theta(\tau=n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-\theta)^{n-1}\theta$$

$$=\frac{\theta}{1-\theta}\ln(1-\theta)\neq\theta\quad(0<\theta<1),$$

故 $\bar{X}_\tau$ 不是 θ 的无偏估计。

例1.2 设 $X_1,X_2,\cdots$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P_{\mu\sigma})(\mu\in(-\infty,\infty),\sigma>0)$ 上的独立同分布随机变量列，

$$X_1\sim N(\mu,\sigma^2),\quad \bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_1^n X_i,$$

$$S_1^2=0, S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_1^n(X_i-\bar{X}_n)^2\quad(n\geq 2),$$

τ 是序列 $\{S_n^2, n\geq 2\}$ 的停时，则可以证明 $\bar{X}_\tau=\frac{1}{\tau}\sum_1^\tau X_i$ 是 μ 的无偏估计。

从这两个例子看到，在序贯样本下，要得到无偏估计需要对具体问题具体分析，不是很容易办到的事。由于这个缘故，在序贯估计理论中，无偏估计不占特殊地位，我们并不在各种具体问题中以获得无偏估计作为重要目标。

§2 贝努里分布参数的序贯估计

设 $X_1,X_2,\cdots$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P_p)$ $(0<p<1)$ 上的独立同分布随机变量列，X_i 取值 0 或 1，

$$P_p(X_1=1)=p=1-P_p(X_1=0),$$

这里 p 未知。如何根据观测值估计 p？我们很容易找出宽度任意小的置信区间。实际上，设 $X_1,\cdots,X_n$ 是样本，则 $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_1^n X_i$ 是 p 的无偏估计，

$$E_p(\bar{X}_n-p)^2=\frac{p(1-p)}{n}\leqslant\frac{1}{4n}\quad(0<p<1).$$

对给定的 $\gamma\in(0,1)$ 及 $d>0$，取 $n\geqslant\frac{1}{4(1-\gamma)d^2}$，则

$$P_p\{|\bar{X}_n-p|\geqslant d\}\leqslant\frac{1}{d^2}E_p(\bar{X}_n-p)^2\leqslant 1-\gamma,$$

于是

$$P_p(\bar{X}_n-d<p<\bar{X}_n+d)\geqslant\gamma. \tag{2.1}$$

这表明 $(\bar{X}_n-d,\bar{X}_n+d)$ 是 p 的置信区间，其宽度是 $2d$，置信水平是 γ。

对于参数 p，我们最关心的是相对误差足够小的估计值，即对任意给定的置信水平 $\gamma\in(0,1)$ 及 $d\in(0,1)$，找出估计值 φ 满足：

$$P_p\left\{\left|\frac{\varphi-p}{p}\right|<d\right\}\geqslant\gamma\ (一切\ p). \tag{2.2}$$

这样的估计值 φ 是否存在呢？我们首先指出，在固定样本量情况下，不管样本量多么大，这样的 φ 是不存在的。

我们用反证法来证明这一点。假若有 $\varphi=\varphi(X_1,\cdots,X_n)$ 满足(2.2)。记 $h=\varphi(0,\cdots,0)$。分两种情况进行讨论。

(1) $h=0$，此时

$$P_p\left\{\left|\frac{\varphi-p}{p}\right|\geqslant d\right\}\geqslant P_p\{X_1=0,\cdots,X_n=0\}=(1-p)^n.$$

(2) $h\neq 0$，此时只要 $p<\frac{|h|}{2}$，则 $\left|\frac{h}{p}-1\right|>1$，从而

$$P_p\left(\left|\frac{\varphi-p}{p}\right|\geqslant d\right)\geqslant P_p\left(\left|\frac{\varphi-p}{p}\right|\geqslant 1\right)$$

$$= P_p\{X_1 = 0, \cdots, X_n = 0\}$$
$$= (1-p)^n.$$

不管哪种情况，均有

$$\sup_p P_p\left(\left|\frac{\varphi - p}{p}\right| \geqslant d\right) = 1,$$

这与(2.2)相矛盾。这个矛盾表明，不存在 φ（无论固定的样本量多么大）满足(2.2)。

下面指出，可从适当的序贯样本得到序贯估计 φ 满足(2.2)，我们用两阶段方法做到这一点。从刚才的讨论看出，固定样本量方法之所以行不通，就在于未知参数 p 可能任意接近0。我们要通过第一阶段的观测值找 p 的置信下限。

引理2.1 设

$$\tau_1 = \inf\{n:\ X_n = 1\},$$
$$g_{\tau_1} = 1 - \gamma^{\frac{1}{\tau_1}},$$

则有

$$\inf_p P_p\{p > g_{\tau_1}\} \geqslant \gamma. \tag{2.3}$$

证明 $P_p(p > g_{\tau_1}) = P_p\left(p > 1 - \gamma^{\frac{1}{\tau_1}}\right)$

$$= P_p\left(\tau_1 > \frac{\ln \gamma}{\ln(1-p)}\right)$$
$$= (1-p)^{[(\ln \gamma)/\ln(1-p)]} \geqslant \gamma.$$

这就证明了(2.3)成立。证毕。

定理2.1 设 $\tau_1 = \inf\{n:\ X_n = 1\}$，$\tau_2 = n(\tau_1)$，这里

$$n(k) = \left[\left(1 - \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{k}}\right)^{-1} \frac{2}{1-\gamma} d^{-2}\right] + 1 \quad (\gamma \in (0,1)).$$

又设 $\varphi = \frac{1}{\tau_2} \sum_{i=1}^{\tau_2} X_{\tau_1 + i}$，则有

$$\inf_p P_p\left\{\left|\frac{\hat{p}-p}{p}\right|<d\right\}\geq\gamma, \tag{2.4}$$

$$E_p(\tau_1+\tau_2)<\infty. \tag{2.5}$$

证明 记 $g_k=1-\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{k}}$，从引理 2.1 知

$$P_p\left\{\left|\frac{\hat{p}-p}{p}\right|\geq d\right\}$$

$$\leq P_p\{p<g_{\tau_1}\}+P_p\left\{p\geq g_{\tau_1},\left|\frac{1}{\tau_2}\sum_{i=1}^{\tau_2}X_{\tau_1+i}-p\right|\geq pd\right\}$$

$$\leq\frac{1-\gamma}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}P_p\left(\tau_1=k,p\geq g_k,\left|\frac{1}{n(k)}\sum_{i=1}^{n(k)}X_{k+i}-p\right|\geq pd\right\}$$

$$=\frac{1-\gamma}{2}+\sum_{k:\,g_k\leq p}P_p(\tau_1=k)P_p(|\bar{X}_{n(k)}-p|\geq pd)$$

$$\leq\frac{1-\gamma}{2}+\sum_{k:\,g_k\leq p}P_p(\tau_1=k)\cdot\frac{1}{p^2d^2}E_p(\bar{X}_{n(k)}-p)^2$$

$$\leq\frac{1-\gamma}{2}+\sum_{k:\,g_k\leq p}P_p(\tau_1=k)\frac{1}{g_kn(k)d^2}$$

$$\leq\frac{1-\gamma}{2}+\frac{1-\gamma}{2}=1-\gamma,$$

这就证明了(2.4)成立。

显然

$$E_p\tau_1=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}p=\frac{1}{p},$$

$$E_p\tau_2=\sum_{k=1}^{\infty}n(k)P_p(\tau_1=k)=p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}n(k)(1-p)^{k-1},$$

但是

$$n(k) \sim \frac{k}{\left(-\ln\frac{1+\gamma}{2}\right)\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)d^2} \quad (k\to\infty),$$

故 $E_p\tau_2<\infty$，从而(2.5)成立。顺便看出，

$$E_p(\tau_1+\tau_2)\sim\frac{C}{p} \quad (p\downarrow 0\text{时}),$$

这里

$$C=1+\frac{1}{\left(-\ln\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{1-\gamma}{2}d^2}.$$

定理 2.1 证毕。

定理 2.1 告诉我们如何找出相对误差足够小的估计值，而且所用的序贯样本的平均值是 $O\left(\frac{1}{p}\right)(p\downarrow 0)$。自然问：是否有序贯估计$\varphi$，满足精度要求(2.4)，而平均样本量的阶当$p\downarrow 0$时比$O\left(\frac{1}{p}\right)$更低？我们说，不可能有更低的阶，这从下面的系 2.1 就知道了。

定理2.2 设 τ 是 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 的任一停时，$\varphi=\varphi_\tau(X_1,\cdots,X_\tau)$满足：

$$\inf_p P_p\left\{\left|\frac{\varphi-p}{p}\right|<d\right\}\geqslant\gamma, \tag{2.6}$$

这里 $\gamma\in(0,1)$，$d\in(0,1)$。则对一切 $p\in(0,1)$，

$$P_p(\tau\geqslant\tau_1)=1,$$

其中

$$\tau_1=\inf\{n:\ X_n=1\}.$$

证明 用反证法。设有 p_0 及正整数 m 使得

$$P_{p_0}(\tau=m<\tau_1)>0.$$

因为$\{\tau=m<\tau_1\}\in\sigma(X_1,\cdots,X_m)$，故有 Borel 集 B 使得

$$\{\tau=m<\tau_1\}=\{(X_1,\cdots,X_m)\in B\}.$$

于是$(0,0,\cdots,0)\in B$。但是

$$\{\tau_1>m\}=\{X_1=0,\cdots,X_m=0\}.$$

可见

$$P_p\{\tau=m<\tau_1\}=P_p\{\tau_1>m\}=(1-p)^m.$$

设 $\varphi_m(0,\cdots,0)=h$，从(2.6)知 $h\neq 0$。当$p<\frac{1}{2}|h|$时，

$$P_p\left(\left|\frac{\varphi-p}{p}\right|\geqslant d\right)\geqslant P_p(\tau=m<\tau_1)=(1-p)^m,$$

从而得

$$\sup_{0<p<1}P_p\left(\left|\frac{\varphi-p}{p}\right|\geqslant d\right)=1.$$

这与(2.6)相矛盾。故 $P_p(\tau\geqslant\tau_1)=1$。 证毕。

系2.1 在定理 2.2 的条件下，$E_p\tau\geqslant\frac{1}{p}$。

证明 这是因为

$$E_p\tau\geqslant E_p\tau_1=\frac{1}{p}.$$

现在问：对任给的$\varepsilon>0$，是否可找到序贯估计φ满足

$$\sup_{0<p<1}E_p\left(\frac{\varphi-p}{p}\right)^2\leqslant\varepsilon. \tag{2.7}$$

这个问题与前面讨论的问题关系密切，可用类似方法解决。仍令

$$\tau_1=\inf\{n:\ X_n=1\},$$

$n(\cdot)$是$\{1,2,3,\cdots\}$到自身内的映射，

$$\tau_2=n(\tau_1),\quad \tau=\tau_1+\tau_2,$$

$$\varphi=\frac{1}{\tau_2}\sum_{i=1}^{\tau_2}X_{\tau_1+i},$$

则

$$I(p)\triangleq E_p\left(\frac{\varphi-p}{p}\right)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{\tau_1 = k\}} \frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{n(k)} \sum_{i=1}^{n(k)} X_{k+i} - p\right)^2 \mathrm{d} P_p$$

$$= p^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} P_p(\tau_1 = k) E_p(\bar{X}_{n(k)} - p)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-p)^k}{n(k)}.$$

可见，为了(2.7)成立，必须且只须

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(k)} \leqslant \varepsilon. \tag{2.8}$$

我们要求 $E_p \tau < \infty$，即

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} n(k) < \infty. \tag{2.9}$$

满足(2.8)和(2.9)的函数 $n(k)$ 多得很，例如取

$$n(k) = k^2 \left[\frac{\pi^2}{6\varepsilon} + 1\right]$$

就可以。

从(2.7)推知

$$\sup_{0<p<1} P_p\left(\left|\frac{\varphi - p}{p}\right| \geqslant d\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{d^2},$$

只要取 $\varepsilon = d^2(1-\gamma)$，则这里的 φ 就适合(2.2)。要注意的是，定理 2.1 中的 $n(k)$ 不满足(2.8)。

§3 正态分布参数的序贯估计

本节恒设 $X_1, X_2, \cdots$ 是$(\Omega, \mathscr{F}, P_{\mu\sigma})(-\infty<\mu<\infty, \sigma>0)$ 上的独立同分布随机变量列，$X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$，$\mu, \sigma$ 都未知，我们来研究 μ 的估计问题。

问题A：给定 $l>0$ 及 $\gamma\in(0,1)$，是否存在正整数 n 及 $\varphi_1(X_1,\cdots,X_n)$，$\varphi_2(X_1,\cdots,X_n)$ 满足

$$0\leqslant\varphi_2-\varphi_1\leqslant l, \tag{3.1}$$

$$P_{\mu\sigma}(\varphi_1<\mu<\varphi_2)\geqslant\gamma \ (\text{一切}\ \mu,\sigma). \tag{3.2}$$

问题B：给定 $\varepsilon>0$，是否存在 n 及 $\varphi(X_1,\cdots,X_n)$ 满足

$$\sup_{\mu,\sigma} E_{\mu\sigma}(\varphi(X_1,\cdots,X_n)-\mu)^2\leqslant\varepsilon. \tag{3.3}$$

适合(3.1)和(3.2)的区间 (φ_1,φ_2) 叫做 μ 的置信水平为 γ 且长度不超过 l 的置信区间。

我们首先指出，这两个问题的答案是否定的。以后将会看到：在序贯样本的情形，即用适当的停时代替上述的固定整数 n，则有相应的 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi$ 满足(3.1)，(3.2)和(3.3)。

我们来证问题A的答案是否定的(从而问题B的答案也是否定的)。

定理3.1(Danzig, 1940) 不存在 $\varphi_1=\varphi_1(X_1,\cdots,X_n)$ 及 $\varphi_2=\varphi_2(X_1,\cdots,X_n)$ 满足(3.1)和(3.2)。

证明 如果有 φ_1,φ_2 满足(3.1)，我们指出必有 μ,σ 使得

$$P_{\mu\sigma}(\varphi_1<\mu<\varphi_2)<\gamma.$$

实际上，令

$$\delta=\delta(X_1,\cdots,X_n)=\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2),$$

则

$$\{\varphi_1<\mu<\varphi_2\}\subset\left\{\,|\delta(X_1,\cdots,X_n)-\mu|<\frac{1}{2}l\right\}.$$

取正整数 N 大于 γ^{-1}，再取 $\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_{2N}$ 满足：

$$\mu_{i+1}-\mu_i>l \ (i=1,2,\cdots,2N-1).$$

于是集合

$$S_i=\left\{(x_1,\cdots,x_n):\ |\delta(x_1,\cdots,x_n)-\mu_i|<\frac{1}{2}l\right\}$$

$(i=1,2,\cdots,2N)$ 两两不交。

$$|P_{\mu_i\sigma}\{(X_1,\cdots,X_n)\in S_i\}-P_{\mu_1\sigma}\{(X_1,\cdots,X_n)\in S_i\}|$$

$$\leqslant\int\cdots\int_{S_i}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\cdot\left|\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^n(x_k-\mu_i)^2\right\}\right.$$

$$\left.-\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^n(x_k-\mu_1)^2\right\}\right|\mathrm{d}\,x_1\cdots\mathrm{d}\,x_n$$

$$\leqslant\int\cdots\int_{R^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\left|\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^n\left(y_k+\frac{\mu_1-\mu_i}{\sigma}\right)^2\right\}\right.$$

$$\left.-\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^n y_k^2\right\}\right|\mathrm{d}\,y_1\cdots\mathrm{d}\,y_n.$$

利用测度论中熟知的事实：若$\{f_{n:n\geq0}\}$是$(\Omega,\mathscr{F},\nu)$上的非负可积函数列，

$$f_n\longrightarrow f_0(\mathrm{a.e.}\nu),\quad \lim_n\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\nu=\int_\Omega f_0\,\mathrm{d}\nu,$$

则

$$\lim_n\int_\Omega|f_n-f_0|\,\mathrm{d}\nu=0.$$

于是

$$\lim_{\sigma\to\infty}|P_{\mu_i\sigma}\{(X_1,\cdots,X_n)\in S_i\}-P_{\mu_1\sigma}\{(X_1,\cdots,X_n)\in S_i\}|=0.$$

可见存在$\sigma_0>0$，对一切$i=1,2,\cdots,2N$有

$$|P_{\mu_i\sigma_0}\{(X_1,\cdots,X_n)\in S_i\}-P_{\mu_1\sigma_0}\{(X_1,\cdots,X_n)\in S_i\}|\leqslant\frac{1}{2N},$$

但存在i_0使得

$$P_{\mu_1\sigma_0}\{(X_1,\cdots,X_n)\in S_{i_0}\}\leqslant\frac{1}{2N},$$

故

$$P_{\mu_{i_0}\sigma_0}\{(X_1,\cdots,X_n)\in S_{i_0}\}\leqslant\frac{1}{N},$$

即有

$$P_{\mu_{i_0}\sigma_0}\left\{|\delta(X_1,\cdots,X_n)-\mu_{i_0}|<\frac{1}{2}l\right\}\leqslant\frac{1}{N}<\gamma,$$

更有

$$P_{\mu_{i_0}\sigma_0}\{\varphi_1<\mu_{i_0}<\varphi_2\}<\gamma.$$

这表明(3.2)不成立。证毕。

从定理3.1立即推出，不存在 $\varphi=\varphi(X_1,\cdots,X_n)$满足(3.3)。下面指出，采用序贯样本，情况就不同了。首先介绍 C.Stein的两阶段方法。

从定理3.1的证明过程看出，由于 σ 可以任意大，造成固定样本量方法出问题。如果 σ已知，则取

$$n\geqslant\frac{1}{d^2}\sigma^2u^2_{\frac{1-\gamma}{2}},$$

$$\varphi_1=\bar{X}_n-d,\qquad\varphi_2=\bar{X}_n+d\ \left(这里\ d=\frac{1}{2}l\right),$$

(3.1)和(3.2)就满足了。这里u_α满足

$$\int_{u_\alpha}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx=\alpha.$$

现在σ未知，Stein 的方法是先取一个样本用来估计 σ的值，然后再利用这个估计值确定第二阶段的样本量大小，具体叙述如下。

取 $m\geqslant2$，令

$$\bar{X}_m=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_i,$$

$$v_m=\left[\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X}_m)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\tau_1=\inf\left\{n:\ n\geqslant m且\ n\geqslant\frac{v_m^2}{d^2}t^2_{m-1,\frac{1-\gamma}{2}}\right\},\qquad(3.4)$$

这里 $d=\dfrac{l}{2}$，$t_{m-1,\alpha}$是 $m-1$ 个自由度的 t 分布的分位点，即有

$$P(t>t_{m-1,\alpha})=\alpha.$$

显然$P_{\mu\sigma}(\tau_1<\infty)=1$。区间

$$I=\left(\bar{X}_{\tau_1}-\frac{v_m}{\sqrt{\tau_1}}t_{m-1,\frac{1-\gamma}{2}},\ \bar{X}_{\tau_1}+\frac{v_m}{\sqrt{\tau_1}}t_{m-1,\frac{1-\gamma}{2}}\right)$$

的长度为

$$\frac{2v_m}{\sqrt{\tau_1}}t_{m-1,\frac{1-\gamma}{2}}\leqslant 2d-l.$$

我们将证明

$$P_{\mu\sigma}(\mu\in I)=\gamma.$$

引理3.1 对一切$n\geqslant 2$，$\bar{X}_n$与$(v_2^2,\cdots,v_n^2)$是独立的，这里

$$v_i=\frac{1}{i-1}\sum_{k=1}^{i}(X_k-\bar{X}_i)^2\ (i\geqslant 2).$$

证明 令

$$u_i=\frac{1}{\sigma}(X_i-\mu)\ (i=1,\cdots,n).$$

则$u_1,\cdots,u_n$ 独立同分布，$u_1\sim N(0,1)$。令

$$y_i=\frac{1}{\sqrt{i(i+1)}}(u_1+\cdots+u_i-iu_{i+1})\ (i=1,\cdots,n-1),$$

$$y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}(u_1+\cdots+u_n),$$

易知$y_1,\cdots,y_n$独立同分布，$y_1\sim N(0,1)$.可以证明：对一切$i\geqslant 2$,

$$v_i^2=\frac{\sigma^2}{i-1}(y_1^2+\cdots+y_{i-1}^2). \tag{3.5}$$

实际上，固定$i\geqslant 2$，令

$$\tilde{y}_i=\frac{1}{\sqrt{i}}(u_1+\cdots+u_i),$$

则从$u_1,\cdots,u_i$到$y_1,\cdots,y_{i-1}$，$\tilde{y}_i$的变换是正交变换，故

$$y_1^2+\cdots+y_{i-1}^2+\tilde{y}_i^2=\sum_{j=1}^{i}u_j^2,$$

$$y_2^2+\cdots+y_{i-1}^2=\sum_{j=1}^{i}u_j^2-i(\bar{u}_i)^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{i}(X_j-\bar{X}_i)^2.$$

由此立即得到(3.5)。由于$(v_2^2,\cdots,v_n^2)$只与$y_1,\cdots,y_{n-1}$有关，$\bar{X}_n=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}y_n+\mu$只与$y_n$有关，故$\bar{X}_n$与$(v_2^2,\cdots,v_n^2)$是独立的。证毕。

引理3.2 设$\tau=\tau(\omega)$只取不小于m的整数值$(m\geqslant 2)$，且对一切$n\geqslant m$，

$$\{\tau=n\}\in\sigma(v_2^2,\cdots,v_n^2),$$

则有下列结论:

(i) $\bar{X}_\tau$是μ的无偏估计；

(ii) $\frac{1}{\sigma}\sqrt{\tau}(\bar{X}_\tau-\mu)\sim N(0,1)$；

(iii) $\frac{1}{v_m}\sqrt{\tau}(\bar{X}_\tau-\mu)$服从$m-1$个自由度的$t$分布。

证明

$$\begin{aligned}E_{\mu\sigma}\bar{X}_\tau&=\sum_{n=m}^{\infty}\int_{\{\tau=n\}}\bar{X}_n\mathrm{d}P\\&=\sum_{n=m}^{\infty}P_{\mu\sigma}(\tau=n)\cdot E_{\mu\sigma}\bar{X}_n\\&=\mu.\end{aligned}$$

可见$\bar{X}_\tau$是均值μ的无偏估计。

$$\begin{aligned}&P_{\mu\sigma}\left(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\tau}(\bar{X}_\tau-\mu)\leqslant x,\ \frac{1}{\sigma}v_m\leqslant y\right)\\&=\sum_{n=m}^{\infty}P_{\mu\sigma}\left(\tau=n,\ \frac{1}{\sigma}v_m\leqslant y,\ \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)}{\sigma}\leqslant x\right)\\&=\sum_{n=m}^{\infty}P_{\mu\sigma}\left(\tau=n,\ \frac{v_m}{\sigma}\leqslant y\right)P_{\mu\sigma}\left(\frac{1}{\sigma}\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)\leqslant x\right)\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} P_{\mu\sigma}\left(\tau = n,\ \frac{1}{\sigma} v_m \leqslant y\right)\phi(x)$$

$$= \phi(x) P_{\mu\sigma}\left(\frac{1}{\sigma} v_m \leqslant y\right),$$

这里 $\phi(x)$是标准正态分布函数。令$y \to \infty$得

$$P_{\mu\sigma}\left(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\tau}(\overline{X}_\tau - \mu) \leqslant x\right) = \phi(x).$$

故$\frac{1}{\sigma}\sqrt{\tau}(\overline{X}_\tau - \mu)$与$\frac{1}{\sigma}v_m$相互独立，从而$\frac{1}{v_m}\sqrt{\tau}(\overline{X}_\tau - \mu)$服从 $m-1$个自由度的 t 分布。证毕。

定理3.2 设τ_1如(3.4)所定义，

$$I = \left(\overline{X}_{\tau_1} - \frac{1}{\sqrt{\tau_1}} v_m t_{m-1,\frac{1-\gamma}{2}},\ \overline{X}_{\tau_1} + \frac{1}{\sqrt{\tau_1}} v_m t_{m-1,\frac{1-\gamma}{2}}\right),$$

则

i) $P_{\mu\sigma}(\mu \in I) = \gamma$;

ii) $E_{\mu\sigma}(\overline{X}_{\tau_1} - \mu)^2 \leqslant \frac{(m-1)d^2}{(m-3)t^2}$(当$m>3$);

iii) $E_{\mu\sigma}\tau_1 > m_0$;

iv) $E_{\mu\sigma}\tau_1 < m_0 + 1 - G_{m-1}(y)$,

这里

$$d = \frac{1}{2}l, \qquad t = t_{m-1,\frac{1-\gamma}{2}},$$

$G_k(x)$是k个自由度的χ^2分布函数，

$$y = \frac{m(m-1)d^2}{t^2\sigma^2},$$

$$m_0 = mG_{m-1}(y) + \frac{1}{d^2}\sigma^2 t^2 (1 - G_{m+1}(y)).$$

证明 从引理3.2知

$$P_{\mu\sigma}\left(\left|\frac{1}{v_m}\sqrt{\tau_1}\,(\overline{X}_{\tau_1}-\mu)\right|<t_{m-1},\ \frac{1-\gamma}{2}\right)=\gamma,$$

即有 $P_{\mu\sigma}(\mu\in I)=\gamma$，这就证明了 i)。

$$E_{\mu\sigma}(\overline{X}_{\tau_1}-\mu)^2=E_{\mu\sigma}\left(\frac{\tau_1(\overline{X}_{\tau_1}-\mu)^2}{v_m^2}\cdot\frac{v_m^2}{\tau_1}\right)$$

$$\leqslant\frac{d^2}{t^2}E_{\mu\sigma}\left(\frac{\tau_1(\overline{X}_{\tau_1}-\mu)^2}{v_m^2}\right)$$

$$=\frac{d^2}{t^2}\cdot\frac{m-1}{m-3}.$$

故 ii) 成立。

因为

$$P_{\mu\sigma}(\tau_1=m)=P_{\mu\sigma}\left(m\geqslant t^2\frac{1}{d^2}v_m^2\right)$$

$$=P_{\mu\sigma}\left(\chi_{m-1}^2\leqslant\frac{m(m-1)d^2}{\sigma^2t^2}\right)$$

$$=G_{m-1}(y),$$

这里 $y=\frac{m(m-1)d^2}{t^2\sigma^2}$。类似地，当 $k>m$ 时，

$$P_{\mu\sigma}(\tau_1=k)=P_{\mu\sigma}\left(\frac{(k-1)(m-1)}{t^2\sigma^2}d^2<\chi_{m-1}^2\leqslant\frac{k(m-1)d^2}{t^2\sigma^2}\right),$$

于是

$$E_{\mu\sigma}\tau_1=mG_{m-1}(y)+\left(2^{\frac{m-1}{2}}\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\right)^{-1}$$

$$\cdot\sum_{k=m+1}^{\infty}\int_{\frac{k-1}{m}y}^{\frac{k}{m}y}ke^{-\frac{1}{2}x}x^{\frac{m-1}{2}-1}\,\mathrm{d}x.$$

$$>mG_{m-1}(y)+\left(2^{\frac{m-1}{2}}\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\right)^{-1}$$

$$\cdot \sum_{k=m+1}^{\infty} \int_{\frac{k-1}{m}y}^{\frac{k}{m}y} \frac{mx}{y} e^{-\frac{1}{2}x} x^{\frac{m-3}{2}} dx$$

$$= mG_{m-1}(y) + \left(2^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\right)^{-1}.$$

$$\frac{1}{y}\int_{y}^{\infty} m e^{-\frac{1}{2}x} x^{\frac{m-1}{2}} dx = mG_{m-1}(y) + \frac{t^2\sigma^2}{d^2}(1 - G_{m+1}(y)) = m_0.$$

同理

$$E_{\mu\sigma}\tau_1 < mG_m(y) + \left(2^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\right)^{-1}$$

$$\cdot \sum_{k=m+1}^{\infty} \int_{\frac{k-1}{m}y}^{\frac{k}{m}y} \left(\frac{mx}{y} + 1\right) e^{-\frac{1}{2}x} x^{\frac{m-3}{2}} dx$$

$$= mG_{m-1}(y) + \frac{1}{d^2}\sigma^2 t^2 (1 - G_{m+1}(y)) + (1 - G_{m-1}(y)),$$

这就证明了 iv)。定理3.2全部证毕。

定理3.2告诉我们，用Stein 方法的确可以得到宽度不超过给定值的置信区间。这个方法的缺点是样本量 τ_1的大小不能控制，当σ很大时，$E_{\mu\sigma}\tau_1$可以取非常大的值。此外，在估计 σ时只用到第一个样本，信息利用不充分，第一个样本的样本量如何确定也没有回答。如何改进 Stein 的 方法一直是现代许多学者的研究对象，这里只介绍一下理论上比较重要的 G. Simons（1968）的结果。

前面提过，当n_0是不小于$\frac{\sigma^2}{d^2}u^2_{\frac{1-\gamma}{2}}$的最小正整数时，

$$P_{\mu\sigma}(\overline{X}_{n_0} - d < \mu < \overline{X}_{n_0} + d) \geq \gamma.$$

从定理3.2知

$$E_{\mu\sigma}\tau_1 > mG_{m-1}(y) + \frac{\sigma^2 t^2}{d^2}(1 - G_{m-1}(y)),$$

注意 $\sigma \to \infty$时，$y \to 0$，但是

$$t = t_{m-1,\frac{1-\gamma}{2}} > u_{\frac{1-\gamma}{2}}$$

（u_a是标准正态分布的份点），故

$$\lim_{\sigma\to\infty}(E_{\mu\sigma}\tau_1 - n_0) = \infty.$$

换句话说，Stein 方法的平均样本量与σ已知时的最优样本量相差可以任意大。

1968年，G. Simons 证明了下列结果：

命题 设

$$\tau_2 = \inf\left\{n:\ n \geqslant m \text{ 且 } n \geqslant \frac{v_n^2}{d^2}(u_{\frac{1-\gamma}{2}})^2\right\}$$

（这里u_a是标准正态分布的上侧分位点），则存在正整数 k 满足：

$$P_{\mu\sigma}(\overline{X}_{\tau_2+k} - d < \mu < \overline{X}_{\tau_2+k} + d) \geqslant \gamma,$$

$$E_{\mu\sigma}(\tau_2 + k) \leqslant n_0 + m + k(\text{一切}\mu, \sigma),$$

这里 n_0是不小于$\frac{\sigma^2}{d^2}u^2_{\frac{1-\gamma}{2}}$的最小正态数。

这个命题告诉我们，若采用置信区间

$$I = (\overline{X}_{\tau_2+k} - d,\ \overline{X}_{\tau_2+k} + d),$$

则置信水平不小于 γ，而且平均样本量与 σ 已知时的最优样本量相差不超过一个固定的整数。换句话说，σ 未知时只不过比 σ 已知时多观察总体有限次，不过对 k 未找出明显的表达式。这个命题的证明很长，有兴趣的读者可参阅Simons(1968)。

§4 置 信 序 列

前面我们对贝努里分布的参数找出了相对误差任意小的估计，又对正态分布的均值找出了宽度任意小的置信区间。方法是：具体问题具体分析，分别用了特殊的技巧。本节则是利用置信序列这个工具进行一般性讨论，所用的方法能成功地解决许多问题。

本节恒设$X_1,X_2,\cdots$是$(\Omega,\mathscr{F},P_{(\theta,\sigma)})$上的独立同分布随机变量列，诸$X_i$取值于可测空间$\mathscr{X}$，$(\theta,\sigma)\in\Theta\times G$，设$\Gamma_n(X_1,\cdots,X_n)$是$\Theta$的子集$(n\geqslant 1)$。

定义4.1 称$\{\Gamma_n(X_1,\cdots,X_n):\ n\geqslant m\}$是$\theta$的水平为$\gamma$的置信序列，若对一切$(\theta,\sigma)\in\Theta\times G$，

$$P_{\theta\sigma}(\theta\in\Gamma_n(X_1,\cdots,X_n),\ 对一切n\geqslant m)\geqslant\gamma.$$

如果Θ是距离空间，且

$$P_\theta\{对一切\ n\geqslant m,\ 存在\ \theta_n\in\Gamma_n(X_1,\cdots,X_n)使得\lim_n \theta_n=\theta\}=1,$$

则称$\{\Gamma_n\}$是相合的。

称$\{\Gamma_n\}$是终于退化的，若

$$P_{\theta\sigma}\{\lim_n \rho(\Gamma_n(X_1,\cdots,X_n))=0\}=1,$$

这里$\rho(\Gamma)$表示集合Γ的直径。

当$\Theta=\langle a,b\rangle$(区间)，

$$\Gamma_n(X_1,\cdots,X_n)=(\xi_n(X_1,\cdots,X_n),\ \eta_n(X_1,\cdots,X_n))(n\geqslant m)$$

时，$\{\Gamma_n\}$称为置信区间列。我们特别希望找到终于退化的相合的置信区间列。这种置信区间列有什么用处呢？请看下面的定理4.1和4.2。

定理4.1 设对参数θ，存在终于退化的相合的水平是γ的置信区间列$\{(\xi_n,\eta_n):\ n\geqslant m\}$，这里$\xi_n<\eta_n$，$\xi_n=\xi_n(X_1,\cdots,X_n)$，$\eta_n=\eta_n(X_1,\cdots,X_n)(n\geqslant m)$都是随机变量，则有下列结论：

i) 对任何$d>0$，若令

$$\tau_1 = \inf\{n:\ n \geqslant m,\ \eta_n - \xi_n < 2d\},$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2}(\xi_{\tau_1} + \eta_{\tau_1}),$$

则有

$$P_{\theta\sigma}(\tau_1 < \infty) = 1 \text{且} P_{\theta\sigma}(\theta_1 - d < \theta < \theta_1 + d) \geqslant \gamma.$$

ii) 对任何 $1 > d > 0$，若令

$$\tau_2 = \inf\left\{n:\ n \geqslant m,\ \xi_n \neq 0 \text{ 且} \frac{1-d}{1+d} < \frac{\eta_n}{\xi_n} < \frac{1+d}{1-d}\right\}$$

且

$$\theta_2 = \begin{cases} \eta_{\tau_2}(1-d), & \text{当} \xi_{\tau_2} > 0 \text{时}, \\ \eta_{\tau_2}(1+d), & \text{当} \xi_{\tau_2} < 0 \text{时}, \end{cases}$$

则对一切 $\theta \neq 0$及σ有

$$P_{\theta\sigma}\left(\left|\frac{1}{\theta}(\theta_2 - \theta)\right| < d\right) \geqslant \gamma. \tag{4.1}$$

证明 因为$\{(\xi_n, \eta_n), n \geqslant m\}$是终于退化的且相合的，故

$$P_{\theta\sigma}(\lim_n \xi_n = \lim_n \eta_n = \theta) = 1.$$

因此

$$P_{\theta\sigma}(\tau_i < \infty) = 1 (i = 1, 2).$$

于是

$$\{\omega:\ \theta \in (\xi_{\tau_i}, \eta\tau_i),\ \tau_i < \infty\} \supset \bigcap_{n=m}^{\infty} \{\omega:\ \theta \in (\xi_n, \eta_n)\},$$

从而

$$P_{\theta\sigma}(|\theta_1 - \theta| < d) \geqslant P_{\theta\sigma}(\theta \in (\xi_\tau, \eta_\tau))$$

$$\geqslant P_{\theta\sigma}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} \{\theta \in (\xi_n, \eta_n)\}\right) \geqslant \gamma.$$

这就证明了 i)。

为了证明 ii)，分两种情形。

① $\theta>0$。此时若$\eta_{\tau_2}>0$，则$\xi_{\tau_2}>0$且$\frac{1}{1-d}\hat{\theta}_2=\eta_{\tau_2}$。又

$$\frac{1}{1-d}\hat{\theta}_2=\frac{1-d}{1+d}\eta_{\tau_2}\leqslant\frac{1-d}{1+d}\cdot\frac{1+d}{1-d}\xi_{\tau_2},$$

故

$$P_{\theta\sigma}\left(\left|\frac{1}{\theta}(\hat{\theta}_2-\theta)\right|<d\right)=P_{\theta\sigma}\left(\frac{1}{1+d}\hat{\theta}_2<\theta<\frac{\hat{\theta}_2}{1-d}\right)$$

$$\geqslant P_{\theta\sigma}(\xi_{\tau_2}<\theta<\eta_{\tau_2})$$

$$\geqslant P_{\theta\sigma}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty}\{\xi_n<\theta<\eta_n\}\right)\geqslant\gamma.$$

② $\theta<0$。此时

$$P_{\theta\sigma}\left(\left|\frac{1}{\theta}(\hat{\theta}_2-\theta)\right|<d\right)=P_{\theta\sigma}\left(\frac{1}{1-d}\hat{\theta}_2<\theta<\frac{1}{1+d}\hat{\theta}_2\right)$$

$$=P_{\theta\sigma}\left(\frac{1+d}{1-d}\xi_{\tau_2}<\theta<\frac{1+d}{1-d}\eta_{\tau_2}\right)$$

$$\geqslant P_{\theta\sigma}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty}\{\xi_n<\theta<\eta_n\}\right)$$

$$\geqslant\gamma.$$

总之，只要$\theta\neq0$，(4.1)成立。证毕。

定理4.2 在定理4.1的假定下，有下列结论：

i）对于检验问题：

$$H_1:\ \theta=\theta_0\longleftrightarrow H_2:\ \theta\neq\theta_0,$$

定义停时：

$$\tau=\inf\{n:\ n\geqslant m,\ \theta_0\overline{\in}(\xi_n,\eta_n)\},\tag{4.2}$$

一旦观测停止就拒绝假设H_1(只要观测未停止就不拒绝H_1)。则这个检验法的功效是1，第一类错误的概率不超过$1-\gamma$。

ii）对于检验问题：

$$H_1:\ \theta\leqslant\theta_0\longleftrightarrow H_2:\ \theta>\theta_0,$$

仍用(4.2)定义停时τ，一旦停止观测且$\theta_0\leqslant\xi_\tau$就拒绝$H_1$，若$\theta_0\geqslant\eta_\tau$就接受$H_1$(只要观测未停止就不拒绝$H_1$)，则这个检验法的两类错误的概率均不超过$1-\gamma$。

证明 i)的证明，由于

$$P_{\theta\sigma}(\lim_n \xi_n=\lim_n \eta_n=\theta)=1,$$

故$\theta\neq\theta_0$时$P_{\theta\sigma}(\tau<\infty)=1$。从而第二类错误的概率是0。又

$$P_{\theta_0\sigma}(\tau<\infty)=P_{\theta_0\sigma}(\text{存在}n\geqslant m\text{使}\ \theta_0\overline{\in}(\xi_n,\eta_n))\leqslant 1-\gamma,$$

所以第一类错误的概率不超过$1-\gamma$。

ii)的证明。当$\theta\leqslant\theta_0$时，

$$\begin{aligned}P_{\theta\sigma}(\theta_0\leqslant\xi_\tau)&\leqslant P_{\theta\sigma}(\theta\leqslant\xi_\tau)\\&\leqslant P_{\theta\sigma}(\text{存在}n\geqslant m\text{使}\theta\overline{\in}(\xi_n,\eta_n))\\&\leqslant 1-\gamma;\end{aligned}$$

当$\theta>\theta_0$时，

$$\begin{aligned}P_{\theta\sigma}(\theta_0\geqslant\eta_\tau)&\leqslant P_{\theta\sigma}(\theta>\eta_\tau)\\&\leqslant P_{\theta\sigma}(\text{存在}n\geqslant m\text{使得}\theta\overline{\in}(\xi_n,\eta_n))\leqslant 1-\gamma.\end{aligned}$$

可见所述检验法的两类错误的概率均不超过$1-\gamma$。定理4.2全部证毕。

置信序列不仅在参数估计和假设检验问题中有用，而且还有许多别的用处(例如，在选择问题中，参看本书第五章§2)。

怎样才能得到终于退化的相合的置信区间列呢？我们要给出两个一般性定理。先证明两个引理。

引理4.1 设$X_1,X_2,\cdots$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量列，X_i是$(\Omega,\mathscr{F})$到$(\mathscr{X}_i,\mathscr{B}_i)$的可测映射$(i\geqslant 1)$，$\mu_i$是$\mathscr{B}_i$上的测度，$(X_1,\cdots,X_n)$关于测度$\mu_1\times\cdots\times\mu_n$的密度为$f_n(u_1,\cdots,u_n)$，又函数列$\{g_n(u_1,\cdots,u_n):\ n\geqslant 1\}$满足：

i) $0\leqslant g_n\leqslant\infty$，$g_n$是乘积空间上的可测函数；

ii) $\displaystyle\int_{\mathscr{X}_{n+1}} g_{n+1}(u_1,\cdots,u_n,u_{n+1})\mu_{n+1}(du_{n+1})$

$$\leqslant g_n(u_1,\cdots,u_n)\ (\text{a.e.}\ \mu_1\times\cdots\times\mu_n)$$

iii) 若$f_n(u_1,\cdots,u_n)=0$，则$g_n(u_1,\cdots,u_n)=0$。

令

$$Z_n=\begin{cases}\dfrac{g_n(X_1,\cdots,X_n)}{f_n(X_1,\cdots,X_n)}, & \text{当分母不为 0},\\ 0, & \text{其他情形},\end{cases}$$

$$\mathscr{F}_n=\sigma(X_1,\cdots,X_n)\ (n\geqslant 1),$$

则$(Z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1)$是非负上鞅。

证明

$$\int_{\{(X_1,\cdots,X_n)\in\Gamma\}} Z_{n+1}\,\mathrm{d}P$$

$$=\int_{\{(X_1,\cdots,X_n,X_{n+1})\in\Gamma\times\mathscr{X}_{n+1}\}}\frac{g_n(X_1,\cdots,X_{n+1})}{f_n(X_1,\cdots,X_{n+1})}\mathrm{d}P$$

$$=\int_{\Gamma\times\mathscr{X}_{n+1}} g_{n+1}(u_1,\cdots,u_{n+1})\,\mathrm{d}\mu_1\cdots\mathrm{d}\mu_{n+1}$$

$$=\int_\Gamma\left[\int_{\mathscr{X}_{n+1}} g_{n+1}(u_1,\cdots,u_{n+1})\,\mathrm{d}\mu_{n+1}\right]\mathrm{d}\mu_1\cdots\mathrm{d}\mu_n$$

$$\leqslant\int_\Gamma g_n(u_1,\cdots,u_n)\,\mathrm{d}\mu_1\cdots\mathrm{d}\mu_n=\int_{\{(X_1,\cdots,X_n)\in\Gamma\}} Z_n\,\mathrm{d}P.$$

这就证明了$(Z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1)$是非负上鞅。证毕。

引理4.2 设 $X_1,X_2,\cdots$是$(\Omega,\mathscr{F},P_\theta)(\theta\in\Theta)$上的随机变量列，$X_i$是$(\Omega,\mathscr{F})$到$(\mathscr{X}_i,\mathscr{B}_i)$的可测映射，$\mu_i$是$\mathscr{B}_i$上的$\sigma$有限测度。设$(X_1,\cdots,X_n)$关于$\mu_1\times\cdots\times\mu_n$的密度是$f_n(u_1,\cdots,u_n;\ \theta)$（$n+1$元可测且只取正值），又$H(\cdot)$是$(\Theta,\mathscr{B}_\theta)$上的测度（这里$\mathscr{B}_\theta$是$\Theta$中的$\sigma$代数），令

$$Z_n=\int_\Theta f_n(X_1,\cdots,X_n;\ \tilde\theta)H(\mathrm{d}\tilde\theta)/f_n(X_1,\cdots,X_n;\ \theta),$$

$$\mathscr{F}_n=\sigma(X_1,\cdots,X_n)(n\geqslant 1),$$

则$(Z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1)$是$(\Omega,\mathscr{F},P_\theta)$上的上鞅。

证明 令

$$M=\left\{(u_1,\cdots,u_n,\theta):\int_{\mathscr{X}_{n+1}}f_{n+1}(u_1,\cdots,u_{n+1};\ \theta)\mu_{n+1}(\mathrm{d}u_{n+1})\right.$$

$$\left.\neq f_n(u_1,\cdots,u_n;\ \theta)\right\},$$

易知

$$\mu_1\times\cdots\times\mu_n(M_\theta)=0,$$

这里

$$M_\theta=\{(u_1,\cdots,u_n):\ (u_1,\cdots,u_n,\theta)\in M\}.$$

由Fubini 定理知

$$\mu_1\times\cdots\times\mu_n\times H(M)=\int_\Theta\mu_1\times\cdots\times\mu_n(M_\theta)H(\mathrm{d}\theta)=0,$$

但

$$\mu_1\times\cdots\times\mu_n\times H(M)=\int_{\mathscr{X}_1\times\cdots\times\mathscr{X}_n}H(M^{u_1\cdots u_n})\mathrm{d}(\mu_1\times\cdots\times\mu_n),$$

这里

$$M^{u_1\cdots u_n}=\{\theta:\ (u_1,\cdots,u_n;\theta)\in M\},$$

故

$$H(M^{u_1\cdots u_n})=0\quad(\text{a.e.}\,\mu_1\times\cdots\times\mu_n).$$

令

$$g_n(u_1,\cdots,u_n)=\int_\Theta f_n(u_1,\cdots,u_n;\theta)H(\mathrm{d}\theta),$$

则

$$\int_{\mathscr{X}_{n+1}}g_{n+1}(u_1,\cdots,u_{n+1})\mu_{n-1}(\mathrm{d}u_{n-1})$$

$$-\int_{\Theta}\left[\int_{\mathscr{X}_{n+1}} f_{n+1}(u_1,\cdots,u_{n+1};\theta)\mu_{n+1}(du_{n+1})\right]H(d\theta)$$

$$=\int_{\Theta} f_n(u_1,\cdots,u_n;\theta)H(d\theta)$$

$$=g_n(u_1,\cdots,u_n)\ (\text{a.e.}\quad \mu_1\times\cdots\times\mu_n),$$

再利用引理1.1即知$(Z_n,\mathscr{F}_n,n\geq 1)$是非负上鞅。证毕。

定理4.3 (Lai, T.L., 1976) 设 $X_1,X_2,\cdots$是

$$(\Omega,\mathscr{F},P_\theta)(\theta\in\Theta=(a,b),\quad -\infty\leq a<b\leq\infty)$$

上的独立同分布随机变量列，X_1的分布密度是

$$f(x,\theta)=\exp\{\theta x-\psi(\theta)\}$$

(关于某σ有限测度ν)；$H(\cdot)$是Θ上的测度，它在Θ的每个非退化区间上有正测度。对$\varepsilon>0$，令

$$G_n(S_n)=\Big\{\lambda:\ \lambda\in\Theta\text{ 且}$$

$$\int_{\Theta}\exp\{(\theta-\lambda)S_n-n[\psi(\theta)-\psi(\lambda)]\}H(d\theta)<\varepsilon\Big\},$$

这里 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i\,(n\geq 1)$，则有下列结论：

i) $G_n(S_n)=(\lambda_n^{(1)},\lambda_n^{(2)})$，其中 $\lambda_n^{(1)}<\lambda_n^{(2)}$。

ii) 若

$$P_\lambda\{\text{对所有充分大的 } n,\ G_n(S_n)\neq\varnothing\}=1,$$

那么

$$P_\lambda(\lim_n \lambda_n^{(1)}=\lim_n \lambda_n^{(2)}=\lambda)=1, \tag{4.1}$$

$$P_\lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\lambda\in G_n(S_n)\}\Big)\geq 1-\frac{1}{\varepsilon}H(\Theta). \tag{4.2}$$

证明 令

$$Z_n = \int_{\Theta} \exp\{\theta S_n - n\psi(\theta)\} H(\mathrm{d}\theta) / \exp\{\lambda S_n - n\psi(\lambda)\} (n \geqslant 1),$$

从引理4.2知$\{Z_n\}$是非负上鞅。从第二章引理9.1知

$$P_\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\lambda \in G_n(S_n)\}\right) = P_\lambda\{\text{对一切}n \geqslant 1,\ Z_n < \varepsilon\}$$

$$\geqslant 1 - \frac{1}{\varepsilon} EZ_1 = 1 - \frac{1}{\varepsilon} H(\Theta).$$

这就证明了(4.2)成立。

令 $\mu(\theta) = E_\theta X_1$，易知

$$\mu(\theta) = \psi'(\theta),$$

$$\mu'(\theta) = \psi''(\theta) = D_\theta(X_1)(\text{方差}) > 0,$$

故$\mu(\theta)$是严格凸函数。令

$$g(\lambda,\theta) = \exp\{(\theta - \lambda) S_n - n[\psi(\theta) - \psi(\lambda)]\},$$

则

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = g(\lambda,\theta)[-S_n + n\psi'(\lambda)],$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2} = g(\lambda,\theta)[-S_n + n\psi'(\lambda)]^2 + g(\lambda,\theta) \cdot n\psi''(\lambda) > 0,$$

可见对固定的θ，$g(\lambda,\theta)$是λ的严格凸函数。当 $\mu(\lambda) \leqslant \frac{1}{n} S_n$ 时，$g(\lambda,\theta)$对λ严格减少；当 $\mu(\lambda) \geqslant \frac{1}{n} S_n$时，$g(\lambda,\theta)$对$\lambda$严格增加。从而

$$\varphi(\lambda) \triangleq \int_{\Theta} g(\lambda,\theta) H(\mathrm{d}\theta)$$

在$\mu(\lambda) \leqslant \frac{1}{n} S_n$时严格减少，在 $\mu(\lambda) \geqslant \frac{1}{n} S_n$ 时严格增加。于是

$$G_n(S_n) = \{\lambda:\ \varphi(\lambda) < \varepsilon\}$$

或者是空集或者是开区间$(\lambda_n^{(1)},\lambda_n^{(2)})$。

剩下的任务是证明(4.1)成立。令

$$\Lambda=\left\{\omega:\ n\text{充分大时 } G_n(S_n)\neq\varnothing\text{ 且 }\lim_n\frac{1}{n}S_n=\mu(\lambda)\right\},$$

从强大数律知 $P_\lambda(\Lambda)=1$。固定$\omega\in\Lambda$，我们来证明

$$\lim_n\lambda_n^{(1)}=\lim_n\lambda_n^{(2)}=\lambda.$$

为此只须证

$$\varliminf_n\lambda_n^{(1)}\geqslant\lambda\geqslant\varlimsup_n\lambda_n^{(2)}.$$

用反证法。设 $\varliminf_n\lambda_n^{(1)}<\lambda$。取$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$满足

$$\varliminf_n\lambda_n^{(1)}<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\lambda.$$

因为 $\lim_n\frac{1}{n}S_n=\mu(\lambda)$，故有子序列$\{n_k\}$，当$k\geqslant k_0$时，

$$\lambda_{n_k}^{(1)}<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\mu^{-1}\left(\frac{S_{n_k}}{n_k}\right)<\lambda+\delta\in\Theta,$$

这里$\mu^{-1}(\cdot)$是反函数，δ是小正数。假设$G_{n_k}(S_{n_k})$不空，则φ的最小值

$$\varphi\left(\mu^{-1}\left(\frac{1}{n_k}S_{n_k}\right)\right)<\varepsilon,$$

从而

$$(\lambda_{n_k}^{(1)},\lambda_3]\subset G_{n_k}(S_{n_k}).$$

当然$[\lambda_1,\lambda_3]\subset G_{n_k}(S_{n_k})$，于是有

$$\int_{(\lambda_2,\lambda_3]}\exp\left\{n_k(\theta-\lambda_1)\left\{\frac{1}{n_k}S_{n_k}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\theta-\lambda_1}(\psi(\theta)-\psi(\lambda_1))\right\}\right\}H(d\theta)<\varepsilon. \qquad (4.3)$$

当 $\theta \in (\lambda_2, \lambda_3)$ 时，

$$\lim_k \left\{ \frac{1}{n_k} S_{n_k} - \frac{1}{\theta - \lambda_1} [\psi(\theta) - \psi(\lambda_1)] \right\}$$

$$= \mu(\lambda) - \frac{1}{\theta - \lambda_1} [\psi(\theta) - \psi(\lambda_1)]$$

$$= \psi'(\lambda) - \psi'(\tilde{\theta})$$

$$\geqslant \psi'(\lambda) - \psi'(\lambda_3) > 0,$$

利用(4.3)和Fatou引理知

$$\int_{(\lambda_2, \lambda_3)} \infty H(\mathrm{d}\theta) \leqslant \varepsilon.$$

这是不可能的(因为$H\{\lambda_2, \lambda_3)\} > 0$)。这个矛盾就证明了

$$\varliminf_n \lambda_n^{(1)} \geqslant \lambda.$$

同理可证

$$\varlimsup_n \lambda_n^{(2)} \leqslant \lambda.$$

故(4.1)成立。证毕。

例4.1(贝努里分布) 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是独立同分布随机变量列，X_1取值 0 或 1，X_1的密度是

$$f(x, \theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} \text{(关于计数测度)},$$

这里$x = 0, 1$。设 $H(\cdot)$是 Lebesgue 测度，

$$Z_n \triangleq \int_0^1 \theta^{S_n} (1-\theta)^{n-S_n} \mathrm{d}\theta / p^{S_n} (1-p)^{n-S_n},$$

这里$n \geqslant 1$，$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$，则

$$Z_n = \frac{1}{(n+1) b(n, p, S_n)},$$

其中$b(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$。由于函数$(n+1)b(n,p,x)$在$p=\frac{x}{n}$时达到最大值，故

$$(n+1)b\left(n,\frac{x}{n},x\right)>1,$$

从而方程

$$(n+1)b(n,p,x)=\varepsilon$$

有两个根$p_n^{(1)}(x)$，$p_n^{(2)}(x)$，p的置信区间列是

$$\{(p_n^{(1)}(S_n),p_n^{(2)}(S_n)),\ n\geqslant 1\}.$$

从(4.2)知

$$P_\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\lambda\in(p_n^{(1)}(S_n),\ p_n^{(2)}(S_n))\}\right)$$

$$=P_\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{Z_n<\varepsilon\}\right)\geqslant 1-\frac{1}{\varepsilon}\ (0<\varepsilon<1).$$

例4.2（Poisson 分布） $X_1,X_2,\cdots$是独立同分布随机变量列，X_1的密度（关于计数测度）是

$$f(x,\theta)=\mathrm{e}^{-\theta}\frac{1}{x!}\theta^x\ \ (x=0,1,2\cdots),\ \ \theta>0.$$

取$H(\mathrm{d}\theta)=\mathrm{e}^{-\theta}\mathrm{d}\theta$（$\theta>0$），则

$$Z_n\triangleq\int_0^{\infty}\prod_{i=1}^{n}f(X_i,\theta)\mathrm{e}^{-\theta}\mathrm{d}\theta\Big/\prod_{i=1}^{n}f(X_i,\lambda)$$

$$=\mathrm{e}^{\lambda n}\lambda^{-S_n}(n+1)^{-S_n-1}S_n!\ ,$$

这里$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$。对于$\varepsilon\in(0,1)$，

$$\{\lambda:\ \lambda>0,\ Z_n<\varepsilon\}=(\lambda_n^{(1)},\lambda_n^{(2)}),$$

这里$\lambda_n^{(1)},\lambda_n^{(2)}$是方程

$$n\lambda - S_n \ln \lambda = \ln\{(n+1)^{S_n+1}\varepsilon/S_n!\}$$

的两个根。$\{(\lambda_n^{(1)},\lambda_n^{(2)});\ n\geqslant 1\}$就是参数$\lambda$的置信区间列，从(4.2)知

$$P_\lambda\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\lambda\in(\lambda_n^{(1)},\lambda_n^{(2)})\}\right\}\geqslant 1-\frac{1}{\varepsilon}.$$

例4.3（均匀分布） 设$X_1,X_2,\cdots$是独立同分布随机变量列，X_1的密度（关于Lebesgue测度）是

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\theta}I_{(0,\theta)}(x)\quad(\theta>0).$$

均匀分布不属于指数族，但在形式上也可仿效定理4.3进行讨论。令

$$Z_n\triangleq\int_0^{\infty}\left[\prod_{i=1}^{n}f(X_i,\theta)\right]\cdot\theta^{-2}e^{-\theta^{-1}}d\theta\Big/\prod_{i=1}^{n}f(X_i,\lambda),$$

经过计算知

$$Z_n=\lambda^n\gamma_n(X_{(n)}^{-1})/I_{(X_{(n)},\infty)}(\lambda),$$

这里$X_{(n)}=\max(X_1,\cdots,X_n)$，$I_B(\lambda)$是示性函数，

$$\gamma_n(x)=\int_0^x u^n e^{-u}du;$$

从第二章引理9.1知

$$P_\lambda(\text{对一切}\ n\geqslant 1,Z_n<\varepsilon^{-1})\geqslant 1-\varepsilon.$$

易知

$$\Delta_n\triangleq\left\{\lambda:\ Z_n<\frac{1}{\varepsilon}\right\}=(X_{(n)},\ [\varepsilon\gamma_n(X_{(n)}^{-1})]^{-n^{-1}}).$$

于是$\{\Delta_n,n\geqslant 1\}$便是$\lambda$的置信区间列（置信水平是$1-\varepsilon$），可以直接证明

$$P_\lambda(\lim_n X_{(n)}=\lambda)=P_\lambda(\lim_n[\varepsilon\gamma_n(X_{(n)}^{-1})]^{-n^{-1}}=\lambda)=1.$$

现在研究含有讨厌参数的情形。设$X_1, X_2, \cdots$是$(\Omega, \mathscr{F}, P_{\theta\sigma})$上的独立同分布随机变量列，$X_1$的分布密度（关于 Lebesgue 测度）是

$$f(x;\theta,\sigma)=\frac{1}{\sigma}g\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right),$$

这里 $\theta\in(-\infty,\infty)$，$\sigma\in(0, \infty)$。两个参数都未知，我们来找出$\theta$的置信区间列。

为了解决这个问题，要利用统计学中熟知的不变性方法，把两个参数化为一个新的参数来处理。令 $X_i^*=X_i/|X_1|$ $(i\geqslant 1)$。（当 $X_1=0$ 时，令 $X_i^*\triangleq 0$）。由于 $P_{\theta\sigma}(X_1=0)=0$，故不妨认为$X_i^*$是处处有限。

引理4.3 在测度 $P_{\theta\sigma}$ 下，$(X_1^*, \cdots, X_n^*)$的联合密度(关于测度 $\nu_1\times\nu\times\cdots\times\nu$)是

$$q_\delta(u_1,\cdots,u_n)=\int_0^\infty\prod_{i=1}^n\left[\frac{1}{u}g\left(\frac{u_i}{u}-\delta\right)\right]\frac{1}{u}\mathrm{d}u, \qquad (4.4)$$

这里 $\delta=\dfrac{\theta}{\sigma}$，$\nu$ 是 Lebesgue 测度，ν_1 是计数测度，$\nu_1(Z)=Z\cap\{-1,1\}$的元素个数。

证明 任意给定 Borel 集 $B_1,\cdots,B_n$，令

$$A_1=\{(x_1,\cdots,x_n):\ x_1>0,\ (1,x_2x_1^{-1},\cdots,x_nx_1^{-1})\in B_1\times\cdots\times B_n\},$$

$$A_2=\{(x_1,\cdots,x_n):\ x_1<0,\ (-1,-x_2x_1^{-1},\cdots,-x_nx_1^{-1})\in B_1\times\cdots\times B_n\}.$$

则

$$\begin{aligned}&P_{\theta\sigma}((X_1^*,\cdots,X_n^*)\in B_1\times\cdots\times B_n\}\\&=\int_{A_1}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^n\prod_{i=1}^n g\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\\&\quad+\int_{A_2}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^n\prod_{i=1}^n g\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.\end{aligned}$$

令

$$E_1=\{(u_1,\cdots,u_n):\ u_1>0,\ (1,u_2,\cdots,u_n)\in B_1\times\cdots\times B_n\},$$

$$E_2=\{(u_1,\cdots,u_n):\ u_1<0,\ (-1,u_2,\cdots,u_n)\in B_1\times\cdots\times B_n\}.$$

是于

$$P_{\theta\sigma}((X_1^*,\cdots,X_n^*)\in B_1\times\cdots\times B_n)$$

$$=\int_{E_1} g\left(\frac{1}{u_1}-\delta\right)\prod_{i=2}^{n} g\left(\frac{u_i}{u_1}-\delta\right)\cdot\frac{1}{u_1^{n+1}}\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n$$

$$+\int_{E_2} g\left(-\frac{1}{u_1}-\delta\right)\prod_{i=2}^{n} g\left(\frac{u_i}{u_1}-\delta\right)\cdot\frac{1}{u_1^{n+1}}\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n$$

$$=\int_{B_1\times\cdots\times B_n}\left[\int_0^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{n} g\left(\frac{u_i}{u}-\delta\right)\right)u^{-n-1}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}(\nu_1\times\nu\times\cdots\times\nu).$$

这表明$(X_1^*,\cdots,X_n^*)$的联合密度是(4.4)。证毕。

定理4.4 设$X_1,X_2,\cdots$是$(\Omega,\mathscr{F},P_{\theta\sigma})$上的独立同分布随机变量列，$X_1$的密度（关于 Lebesgue 测度)是

$$\frac{1}{\sigma}g\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right),\qquad \theta\in(-\infty,\infty),\ \sigma\in(0,\infty).$$

$H(\cdot)$是$(-\infty,\infty)$上的测度，令

$$h_n(X_1,\cdots,X_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q_\delta(X_1^*,\cdots,X_n^*)}{q_0(X_1^*,\cdots,X_n^*)}H(\mathrm{d}\delta),$$

其中$q_\delta(u_1,\cdots,u_n)$的定义见(4.4),

$$\Gamma_n=\{\mu:\ h_n(X_1-\mu,\cdots,X_n-\mu)<\varepsilon\}\ (\varepsilon>0),$$

则有

$$P_{\theta\sigma}\left\{\bigcap_{n=m}^{\infty}\{\theta\in\Gamma_n\}\right\}$$

$$\geqslant 1-P_{0\sigma}(h_m(X_1,\cdots,X_m)\geqslant\varepsilon)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\{h_m(X_1,\cdots,X_m)\geqslant\varepsilon\}} h_m(X_1,\cdots,X_m)\mathrm{d}P_{0\sigma}. \qquad (4.5)$$

证明 在测度$P_{\theta\sigma}$下，$(X_1^*,\cdots,X_n^*)$的联合密度是(4.4)。特别在$P_{0\sigma}$下，$(X_1^*,\cdots,X_n^*)$的联合密度是$q_0(u_1,\cdots,u_n)$。从引理 4.2 知

$$\{h_n(X_1,\cdots,X_n),\ \sigma(X_1^*,\cdots,X_n^*),\ n\geqslant 1\}$$

是非负上鞅(对测度 $P_{0\sigma}$ 而言)。于是利用第二章引理 9.1 知

$$\begin{aligned}
P_{0\sigma}\Big(\bigcup_{n=m}^{\infty}\{h_n(X_1,\cdots,X_n)\geqslant\varepsilon\}\Big)
&\leqslant P_{0\sigma}(h_m(X_1,\cdots,X_m)\geqslant\varepsilon)\\
&\quad+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\{h_m(X_1,\cdots,X_m)<\varepsilon\}} h_m(X_1,\cdots,X_m)\,dP_{0\sigma}.
\end{aligned}$$

由于 $X_i-\theta$ 的密度是 $\frac{1}{\sigma}g\Big(\frac{x}{\sigma}\Big)$，故

$$\begin{aligned}
P_{\theta\sigma}\Big(\bigcap_{n=m}^{\infty}\{\theta\in\Gamma_n\}\Big)&=P_{\theta\sigma}\Big(\bigcap_{n=m}^{\infty}\{h_n(X_1-\theta,\cdots,X_n-\theta)<\varepsilon\}\Big)\\
&=P_{0\sigma}\Big(\bigcap_{n=m}^{\infty}\{h_n(X_1,\cdots,X_n)<\varepsilon\}\Big),
\end{aligned}$$

故(4.5)成立。证毕。

系4.1 在定理 4.4 的假设下，

$$P_{\theta\sigma}\Big(\bigcap_{n=m}^{\infty}\{\theta\in\Gamma_n\}\Big)\geqslant 1-\frac{1}{\varepsilon}E_{0\sigma}h_m(X_1,\cdots,X_m). \qquad (4.6)$$

证明 这从(4.5)直接推出，证毕。

值得注意的是，不等式(4.5)的右边不依赖于σ，故只要取 ε 足够大，(4.5)的右端可大于预先给定的 $\gamma(\gamma\in(0,1))$，因而得到 θ 的置信水平为 γ 的置信集序列$\{\Gamma_n,n\geqslant m\}$。

在§5中将把本节的一般理论用到指数分布和正态分布上去。

§5 两个重要例子

本节将上节的理论应用到正态分布和指数分布上去。

(1) 正态分布情形。

设 $X_1, X_2, \cdots$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P_{\theta\sigma})$ 上独立同分布随机变量列， $X_1 \sim N(\theta, \sigma^2)$， θ, σ 都未知。我们要对 θ 找出置信区间列并用于参数估计和假设检验。

记

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\},$$

$$X_i^* = X_i / |X_1| \quad (i \geqslant 1).$$

$(X_1^*, \cdots, X_n^*)$ 的联合密度为 $q_\delta(u_1, \cdots, u_n)$， $\left(\delta = \frac{\theta}{\sigma}\right)$。从引理 4.3 知

$$\begin{aligned} q_\delta(u_1, \cdots, u_n) &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n u^{-n-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_1^n (u^{-1}u_i - \delta)^2\right\} du \\ &= (\sqrt{2\pi})^{-n} \exp\left\{-\frac{n}{2}\delta^2\right\} \int_0^\infty \left(2z\left(\sum_1^n u_i^2\right)^{-1}\right)^{\frac{n-2}{2}} \\ &\quad \times \exp\left\{-z + \delta\left(\sum_1^n u_i^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2z} \cdot \sum_1^n u_i\right\} dz, \end{aligned}$$

取测度 $H(d\delta) = \sqrt{m}(\sqrt{2\pi})^{-1} d\delta$。于是

$$\begin{aligned} &h_n(X_1, \cdots, X_n) \\ &\triangleq \int_{-\infty}^\infty [q_\delta(X_1^*, \cdots, X_n^*)/q_0(X_1^*, \cdots, X_n^*)] H(d\delta) \\ &= \frac{\sqrt{m}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp\left\{-\frac{n}{2}\delta^2 + \delta \frac{\sqrt{2z}}{\sqrt{\sum_1^n u_i^2}} \sum_1^n u_i\right\} z^{\frac{n}{2}-1} \\ &\quad \times e^{-z} d\delta dz \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{n}}\left(\frac{\sum_{1}^{n} X_i^2}{\sum_{1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{(\bar{X}_n)^2}{v_n^2}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

这里

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n),$$

$$v_n = \left[\frac{1}{n}\left(\sum_{1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

易知

$$\{\theta:\ h_n(X_1-\theta,\cdots,X_n-\theta)\geq\varepsilon\}=\{\theta:\ |\bar{X}_n-\theta|\leq a_n\}.$$

这里

$$a_n=\left(\left(\sqrt{\frac{n}{m}}\,\varepsilon\right)^{\frac{2}{n}}-1\right)^{\frac{1}{2}}v_n. \tag{5.1}$$

从定理 4.1 知

$$P_{\theta\sigma}\left(\bigcap_{n\geq m}\left\{\bar{X}_n-a_n\leq\theta\leq\bar{X}_n+a_n\right\}\right)$$

$$\geq 1-P_{\theta\sigma}(h_m\geq\varepsilon)-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\{h_m<\varepsilon\}}h_m\,\mathrm{d}P_{\theta\sigma}. \tag{5.2}$$

易知

$$P_{\theta\sigma}(h_m\geq\varepsilon)=P_{0\sigma}\left(\left[1+\left(\frac{\bar{X}_m}{v_m}\right)^2\right]^{\frac{m}{2}}\geq\varepsilon\right)$$

$$=P_{0\sigma}\{|t_{m-1}|\geq a\}$$

$$=2[1-F_{m-1}(a)],$$

这里 $t_{m-1}=\sqrt{m-1}\,\bar{x}_m\cdot v_m^{-1}$ 服从 $m-1$ 个自由度的 t 分布，$F_{m-1}(x)$ 是它的分布函数，

$$a=\sqrt{m-1}\,(\varepsilon^{\frac{2}{m}}-1)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\int_{\{h_m<\varepsilon\}} h_m(X_1,\cdots,X_m)\,\mathrm{d}P_{0\sigma}$$

$$=\int_{\{|t_{m-1}|<a\}}\left(1+\frac{1}{m-1}t_{m-1}^2\right)^{-\frac{m}{2}}\mathrm{d}P_{0\sigma}$$

$$=\int_{-a}^{a}\left(1+\frac{t^2}{m-1}\right)^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\left(\Gamma((m-1)\pi)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\right)^{-1}$$

$$\times\left(1+\frac{t^2}{m-1}\right)^{-\frac{m}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=2a\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\left(\Gamma((m-1)\pi)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\right)^{-1}.$$

易知 $\varepsilon=\left(1+\frac{a^2}{m-1}\right)^{-\frac{m}{2}}$，从(5.2)得到：

$$P_{\theta\sigma}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty}\{\theta\in(\bar{X}_n-a_n,\bar{X}_n+a_n)\}\right)$$
$$\geqslant 1-2[1-F_{m-1}(a)+a\varphi_{m-1}(a)],\qquad(5.3)$$

这里

$$\varphi_{m-1}(u)=\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\left(\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\Gamma((m-1)\pi)\right)^{-1}\left(1+\frac{u^2}{m-1}\right)^{-\frac{m}{2}}$$

是 $m-1$ 自由度的 t 分布的密度函数。

从(5.1)知

$$a_n=v_n\left[(A_n)^{\frac{1}{n}}-1\right]^{\frac{1}{2}}\quad(n\geqslant m),$$

这里

$$A=\frac{1}{m}\left(1+\frac{a^2}{m-1}\right)^m.$$

由于 $\lim_{a\to\infty}a\varphi_{m-1}(a)=0$，只要 a 充分大，有

$$1-2[1-F_{m-1}(a)+af_{m-1}(a)]=\gamma, \tag{5.4}$$

于是$\{(\overline{X}_n-a_n,\overline{X}_n+a_n),\ n\geqslant m\}$是$\theta$的置信水平为$\gamma$的置信区间列。

容易推知

$$a_n\sim\sigma\sqrt{n^{-1}\ln n}\ (n\to\infty).$$

自然问：是否有趋于零的速度最快的序列$\{b_n\}$使得

$$\{(\overline{X}_n-b_n,\overline{X}_n+b_n),n\geqslant m\}$$

仍是θ的置信区间列（置信水平为γ）？

若在$h_n(X_1,\cdots,X_n)$的定义里，取测度$H(\cdot)$如下：

$$H(B)=\int_B f(x)\mathrm{d}x\ \ (B\text{是任意 Borel 集}),$$

这里

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^{-1}(|\ln x|)^{-1}(\ln|\ln x|)^{-1-\alpha}, & x\in(0,e^{-e}),\\ 0, & \text{其它情形},\end{cases}$$

其中$\alpha>0$。经过相当复杂的推理（见 Lai，T.L(1971)），可得θ的置信区间列

$$\{(\overline{X}_n-b_n,\overline{X}_n+b_n),\ n\geqslant m\},$$

其中$b_n\sim\sigma\sqrt{2n^{-1}\ln\ln n}\ (n\to\infty)$。从重对数律知道，不能找到区间宽度趋于零的速度比这更快的置信区间列。

应用一：任意给定$l>0$，令

$$\tau=\inf\left\{n:\ n\geqslant m,\ v_n[(A_n)^{\frac{1}{n}}-1]^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{2}l\right\},$$

这里$A=\frac{1}{m}\left(1+\frac{a^2}{m-1}\right)^m$，$a$适合(5.4)，则

$$P_{\theta\sigma}(\tau<\infty)=1.$$

记$\Delta_\tau=v_\tau((A\tau)^{\frac{1}{\tau}}-1)^{\frac{1}{2}}$，于是$(\overline{X}_\tau-\Delta_\tau,\ \overline{X}_\tau+\Delta_\tau)$是$\theta$的宽度

不超过 l 的置信区间（置信水平是 γ）。

应用二：对于检验问题：

$$H_1:\ \theta=\theta_0\longleftrightarrow H_2:\ \theta\neq\theta_0.$$

定义停时如下：

$$\tau=\inf\{n:\ n\geqslant m,\ \theta_0\overline{\in}(\xi_n,\eta_n)\},\qquad(5.5)$$

这里

$$\xi_n=\overline{X}_n-v_n((A_n)^{\frac{1}{n}}-1)^{\frac{1}{2}},$$

$$\eta_n=\overline{X}_n+v_n((A_n)^{\frac{1}{n}}-1)^{\frac{1}{2}}(n\geqslant 1).$$

一旦停止观测就拒绝 H_1（只要继续观测就不拒绝 H_1）。从定理 4.2 知这个检验法的功效是一，第一类错误的概率不超过给定的 $1-\gamma$。注意(5.5)可改写为：

$$\tau=\inf\left\{n:\ n\geqslant m,\ \frac{|\overline{X}_n-\theta_0|}{v_n}\geqslant((A_n)^{\frac{1}{n}}-1)^{\frac{1}{2}}\right\}.\qquad(5.6)$$

应用三：对于检验问题：

$$H_1:\ \theta\leqslant\theta_0\longleftrightarrow H_2:\ \theta>\theta_0,$$

仍用停时(5.6)，一旦停止观测且 $\overline{X}_\tau>\theta_0$ 则拒绝 H_1；而停止观测时 $\overline{X}_\tau\leqslant\theta_0$ 则接受 H_1（只要观测未终止就不拒绝 H_1）。从定理 4.2 知，这个检验法的两类错误的概率均不超过 $1-\gamma$。

应用四：对于检验问题：

$$H_1:\ \theta\leqslant\theta_1\longleftrightarrow H_2:\ \theta\geqslant\theta_2,$$

这里 $\theta_1<\theta_2$ 是两个已知数，定义停时如下：

$$\tau_1=\inf\{n:\ n\geqslant m,\ \overline{X}_n>\lambda_n v_n+\theta_1\ \text{或}$$
$$\overline{X}_n<-\lambda_n v_n+\theta_2\}\qquad(5.7)$$

这里 $\lambda_n=[(A_n)^{\frac{1}{n}}-1]^{\frac{1}{2}}$，$A=\frac{1}{m}\left(1+\frac{a^2}{m-1}\right)^m$，$a$ 满足(5.4)。

因为 $P_{\theta\sigma}(\lim\limits_n v_n=\sigma)=1$，故

$$P_{\theta\sigma}(\tau_1<\infty)=1.$$

当$\overline{X}_{\tau_1}\geqslant\lambda_{\tau_1}v_{\tau_1}+\theta_1$时拒绝$H_1$；当$\overline{X}_{\tau_1}\leqslant-\lambda_{\tau_1}v_{\tau_1}+\theta_2$时就接受$H_1$。我们指出：这个检验法的两类错误概率均不超过$1-\gamma$。

实际上，对任何$\theta\leqslant\theta_1$，

$$
\begin{aligned}
P_{\theta\sigma}\,(\text{拒绝 } H_1) &= P_{\theta\sigma}(\overline{X}_{\tau_1}\geqslant\lambda_{\tau_1}v_{\tau_1}+\theta_1)\\
&\leqslant P_{\theta\sigma}\,(\overline{X}_{\tau_1}-\lambda_{\tau_1}v_{\tau_1}\geqslant\theta)\\
&\leqslant P_{\theta\sigma}(\text{存在 } n\geqslant m \text{ 使得 } \theta\overline{\in}(\overline{X}_n-\lambda_n v_n,\overline{X}_n+\lambda_n v_n))\\
&\leqslant 1-\gamma.
\end{aligned}
$$

另一方面，对任何$\theta\geqslant\theta_2$，

$$
\begin{aligned}
P_{\theta\sigma}(\text{接受 } H_1) &= P_{\theta\sigma}(\overline{X}_{\tau_1}\leqslant-\lambda_{\tau_1}v_{\tau_1}+\theta_2)\\
&\leqslant P_{\theta\sigma}\,(\overline{X}_{\tau_1}+\lambda_{\tau_1}v_{\tau_1}\leqslant\theta)\\
&= P_{\theta\sigma}(\text{存在 } n\geqslant m \text{ 使得 } \theta\overline{\in}\,(\overline{X}_n-\lambda_n v_n,\ \overline{X}_n+\lambda_n v_n))\\
&\leqslant 1-\gamma.
\end{aligned}
$$

（2）指数分布情形。

设$X_1,X_2,\cdots$是$(\Omega,\mathscr{F},P_{\theta\sigma})$上独立同分布随机变量列，$X_1$的分布密度（关于 Lebesgue 测度）是$\frac{1}{\sigma}g\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)$，这里

$$g(x)=e^{-x}I_{(0,\infty)}(x),\qquad \sigma>0,\ \theta\in(-\infty,\infty).$$

两个参数都未知。我们要找出θ的置信区间列，并用于参数估计和假设检验。

令$X_i^*=X_i/|X_1|$ $(i\geqslant1)$，$\delta=\dfrac{\theta}{\sigma}$，从引理 4.3 知，$(X_1^*,\cdots,X_n^*)$的联合密度

$$
\begin{aligned}
q_\delta(u_1,\cdots,u_n) &= \int_0^\infty u^{-n-1}\prod_{i=1}^n g\left(\frac{u_i}{u}-\delta\right)\mathrm{d}u\\
&= \int_0^\infty u^{-n-1}\prod_{i=1}^n I_{(0,\infty)}\left(\frac{u_i}{u}-\delta\right)\exp\left\{-\left(\frac{u_i}{u}-\delta\right)\right\}\mathrm{d}u\\
&= \int_0^\infty u^{-n-1}I_{(0,\infty)}\left(\frac{1}{u}u_{(1)}-\delta\right)\exp\left\{-\frac{1}{u}\sum_1^n u_i+n\delta\right\}\cdot\mathrm{d}u,
\end{aligned}
$$

这里 $u_{(1)}=\min(u_1,\cdots,u_n)$。取 $H(\cdot)$ 为 Lebesgue 测度，沿用定理 4.4 中的记号，

$$h_n(X_1,\cdots,X_n)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}[q_\delta(X_1^*,\cdots,X_n^*)/q_0(X_1^*,\cdots,X_n^*)]\mathrm{d}\delta.$$

经过计算知

$$q_0(u_1,\cdots,u_n)=\left(\sum_1^n u_i\right)^{-n}\Gamma(n),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}q_\delta(u_1,\cdots,u_n)\mathrm{d}\delta=n^{-1}\Gamma(n)\cdot\left(\sum_1^n u_i-nu_{(1)}\right)^{-n}.$$

于是

$$h_n(X_1,\cdots,X_n)=n^{-1}[1-X_{(1)}\cdot(\overline{X}_n)^{-1}]^{-n},$$

这里 $X_{(1)}=\min(X_1,\cdots,X_n)$。从而

$$I_n\triangleq\{\theta:\ h_n(X_1-\theta,\cdots,X_n-\theta)<\varepsilon\}=(\xi_n,\eta_n),$$

这里

$$\xi_n=\overline{X}_n-(n\varepsilon)^{\frac{1}{n}}(\overline{X}_n-X_{(1)}),\qquad \eta_n=X_{(1)}.$$

从定理 4.4 知

$$P_{\theta\sigma}\left(\bigcap_{n=2}^{\infty}\{\theta\in I_n\}\right)\geqslant 1-P_{0\sigma}(h_2(X_1,X_2)\geqslant\varepsilon)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\{h_2<\varepsilon\}}h_2\mathrm{d}P_{0\sigma}.$$

为了计算上式的右端，令

$$W=\frac{\min(X_1,X_2)}{X_1+X_2},$$

$$F(t)=P_{01}(W\leqslant t).$$

$t\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$时，$F(t)=2t$。当 $t\leqslant 0$ 时 $F(t)=0$；当$t>\frac{1}{2}$时$F(t)=1$。

于是

$$P_{0\sigma}(h_2(X_1,X_2)\geqslant\varepsilon)=P_{01}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2w}\right)^2\geqslant\varepsilon\right)$$

$$=P_{01}\left(w\geqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}},$$

$$\int_{\{h_2<\varepsilon\}}h_2\mathrm{d}P_{0\sigma}=\int_0^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)}(1-2w)^{-2}\mathrm{d}w=\frac{1}{2}(\sqrt{2\varepsilon}-1).$$

给定 $\gamma\in(0,1)$，取 $\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}}\right)^2$，则

$$\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}+\frac{1}{2\varepsilon}(\sqrt{2\varepsilon}-1)=1-\gamma.$$

从而有

$$P_{\theta\sigma}\left(\bigcap_{n=2}^{\infty}\{\theta\in I_n\}\right)\geqslant\gamma.$$

可见$\{I_n,n\geqslant2\}$就是 θ 的置信区间列(置信水平是 γ)。由于

$$P_{\theta\sigma}(\lim_n X_{(1)}=\theta)=1,$$

$$P_{\theta\sigma}(\lim_n\overline{X}_n=E_{\theta\sigma}X_1=\theta+\sigma)=1,$$

这个置信序列是相合的。

应用一：给定 $l>0$，令

$$\tau=\inf\{n:\ n\geqslant2,\ \eta_n-\xi_n\leqslant l\},$$

这里

$$\xi_n=\overline{X}_n-(n\varepsilon)^{\frac{1}{n}}(\overline{X}_n-X_{(1)}),$$

$$\eta_n=X_{(1)},$$

$$X_{(1)}=\min(X_1,\cdots,X_n),$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}}\right)^2.$$

易知

$$\tau=\inf\{n:\ n\geqslant2,\ ((n\varepsilon)^{\frac{1}{n}}-1)(\overline{X}_n-X_{(1)})\leqslant l\},$$

$$P_{\theta\sigma}(\tau<\infty)=1.$$

(ξ_τ,η_τ)就是θ的宽度不超过l的置信区间（置信水平是γ)。

应用二：对于检验问题：

$$H_1:\ \theta=\theta_0\longleftrightarrow H_2:\ \theta\neq\theta_0,$$

定义停时如下：

$$\tau=\inf\{n:\ n\geqslant 2,\ \theta_0\overline{\in}(\xi_n,\eta_n)\},\tag{5.8}$$

这里

$$\xi_n=\overline{X}_n-(n\varepsilon)^{\frac{1}{n}}(\overline{X}_n-X_{(1)}),$$

$$\eta_n=X_{(1)},\ \ n\geqslant 1,$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}}\right)^2.$$

一旦停止观测便否定H_1，只要未停止观测就不否定H_1。这个检验的功效是1，第一类错误的概率不超过$1-\gamma$。

应用三：对于检验问题：

$$H_1:\ \theta\leqslant\theta_0\longleftrightarrow H_2:\ \theta>\theta_0,$$

仍用停时(5.8)。当$\xi_\tau\geqslant\theta_0$时拒绝$H_1$，当$\eta_\tau\leqslant\theta_0$时接受$H_1$(只要观测未停止就不拒绝$H_1$)。这个检验法的两类错误的概率均不超过$1-\gamma$。

应用四：对于检验问题：

$$H_1:\ \theta\leqslant\theta_1\longleftrightarrow H_2:\ \theta\geqslant\theta_2,$$

这里$\theta_1<\theta_2$是已知数，定义停时如下．

$$\tau=\inf\{n:\ n\geqslant 2,\ \eta_n\leqslant\theta_2\text{ 或 }\xi_n\geqslant\theta_1\},$$

这里的ξ_n,η_n与上面的定义是一样的。易知

$$P_{\theta\sigma}(\tau<\infty)=1.$$

当$\xi_\tau\geqslant\theta_1$时拒绝$H_1$，当$\eta_\tau\leqslant\theta_2$时接受$H_1$．这个检验法的两类错误的概率均不超过$1-\gamma$。

通过以上的讨论，我们看到置信序列的用处是很广泛的．解决同一个问题的置信序列一般不只一种，究竟哪一种具有最优良

的性质呢？优良性的研究相当复杂。置信序列的现有理论还不完善。

§6. 随机逼近

本节讨论一个特殊的估计问题——随机逼近。随机逼近起源于 Robbins 等人(1951)的著名工作，由于应用广泛受到人们的重视，现已形成数理统计的一个分支。这里只讨论一些简单而典型的情况。

设 $M(x)$ 是一个 Borel 可测函数，一个常见的问题是求方程 $M(x)=\alpha$ 的根。如果函数 $M(x)$ 的表达式是已知的，常用熟知的 Newton-Naphson 方法求解。在实际问题中，往往函数 $M(x)$ 的表达式不知道，但给定 x 后，我们只能得到某随机变量 $Y(x)$ 的观测值，这里 $EY(x)=M(x)$。这个 $M(x)$ 常叫做回归函数。如何找 $M(x)=\alpha$ 的根或根的近似值呢？这是实际工作中十分关心的问题。

例6.1 设 x 表示注入小白鼠身上的被检药物的剂量，$Y(x)$ 表示当注入 x 剂量的药物后小白鼠的反应。将反应分成两类：一类是注入后一定时间（如24小时）之内死亡，另一类是这段时间不死亡。

$$Y(x)=\begin{cases}1, & \text{如果小白鼠死亡，}\\ 0, & \text{如果小白鼠不死亡。}\end{cases}$$

于是 $EY(x)=P(Y(x)=1)\triangleq M(x)$ 表示平均死亡率。所谓半数致死量 L 乃是方程 $M(x)=\dfrac{1}{2}$ 的根，这是医学试验中很关心的量。如何求出 L？

我们回到一般情形下如何求解的问题上来。最早提出也是最著名的解法是 Robbins-Monro 方法（简称 R-M 方法）。叙述如下：

取定适当的常数列$\{a_n, n\geqslant 1\}$(通常取$a_n=n^{-1}$)。先取初值X_1(常数)，然后用下列递推公式

$$X_{n+1}=X_n-a_n(Y_n-\alpha)\quad(n\geqslant 1)\qquad(6.1)$$

来确定序列$\{X_n, n\geqslant 1\}$，这里$Y_n=Y(X_n)$是$Y(x)$在$x=X_n$时的观测值($n\geqslant 1$)。设$M(x)=\alpha$的根是θ，可以证明(见下面的定理6.2)，在一定条件下，

$$P(\lim_n X_n=\theta)=1。$$

换句话说，只要n足够大，X_n可作为θ的近似值。

在实际问题里，有时要求回归函数$M(x)$的最大值点θ ($M(\theta)=\max\limits_x M(x)$)。由于$M(x)$未知，不能用通常的微分法来解；又由于不能直接观测到$M'(x)$的近似值，也不能使用上述的R-M方法。这时可使用下列Kiefer-Wolfowicz方法(1952)(简称K-W方法)。

取定两个数列$\{a_n\}$,$\{c_n\}$(通常可取$a_n=n^{-1}, c_n=n^{-\frac{1}{3}}, n\geqslant 1$)。先取初值$X_1$(常数)，以后每一步做两个观测。用下列递推公式

$$X_{n+1}=X_n+\frac{a_n}{c_n}\{Y_{2n}-Y_{2n-1}\}\quad(n\geqslant 1)\qquad(6.2)$$

来确定序列$\{X_n, n\geqslant 1\}$，这里

$$Y_{2n}=Y(X_n+c_n),$$
$$Y_{2n-1}=Y(X_n-c_n)$$

是$Y(x)$在X_n+c_n, X_n-c_n处的观测值($n\geqslant 1$)。设$M(\theta)=\max\limits_x M(x)$。可以证明(见下面的定理6.4)，在一定条件下，

$$P(\lim_n X_n=\theta)=1。$$

由上述可以看出，R-M方法及K-W方法均简单易行。至于保证收敛的条件及理论根据，叙述起来就比较复杂些。现在来讲收敛性理论。

引理6.1 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$和$\{d_n\}$都是实数列，前三个列

是非负的，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\infty$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$收敛。对一切$n\geqslant N_0$，有不等式

$$c_{n+1}\leqslant \max(a_n, c_n+d_n-b_n), \tag{6.3}$$

则

$$\overline{\lim_n} c_n\leqslant \overline{\lim_n} a_n .$$

证明 任意固定$N\geqslant N_0$，利用数学归纳法知，对一切$n\geqslant N$，有

$$c_{n+1}\leqslant \max\left(c_N+\sum_{j=N}^{n}(d_j-b_j),\ \max_{N\leqslant k\leqslant n}\left(a_k+\sum_{j=k+1}^{n}(d_j-b_j)\right)\right).$$

由于存在$n_1>N$，使得$n\geqslant n_1$时，

$$c_N+\sum_{j=N}^{n}(d_j-b_j)<0,$$

于是对一切$n\geqslant n_1$，有

$$c_{n+1}\leqslant \max_{N\leqslant k\leqslant n}\left(a_k+\sum_{j=k+1}^{n}(d_j-b_j)\right)$$

$$\leqslant \sup_{k\geqslant N} a_k+\max_{N\leqslant k\leqslant n}\sum_{j=k+1}^{n} d_j .$$

由于$\sum_{1}^{\infty} d_j$收敛，故对$\varepsilon>0$，有$N_1>N_0$，使对一切$N\geqslant N_1$，

$$\max_{N\leqslant k\leqslant n}\sum_{j=k+1}^{n} d_j<\varepsilon,$$

于是

$$\overline{\lim_n} c_n\leqslant \overline{\lim_n} a_n+\varepsilon .$$

令$\varepsilon\to 0$得

$$\overline{\lim_n} c_n\leqslant \overline{\lim_n} a_n .$$

证毕。

定理 6.1 (Dvoretzky, 1956) 设$\{X_n\}$,$\{T_n\}$和$\{Z_n\}$都是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量列，对一切$n\geq 1$有关系式：

$$X_{n+1}=T_n+Z_n,$$

$$T_n=f_n(X_1,\cdots,X_n)\ \ (f_n(\cdots)\text{是 Borel 函数}),$$

$$E(Z_n|X_1,\cdots,X_n)=0\ \ (\text{a.s.}),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}EZ_n^2<\infty,$$

$$|T_n|\leq\max(\alpha_n,|X_n|-\gamma_n),$$

$$\overline{\lim_n}|X_n|\leq 2\overline{\lim_n}\alpha_n\ \ (\text{a.s.}).$$

这里$\{\alpha_n\}$和$\{\gamma_n\}$是非负随机变量列，$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n=\infty(\text{a.s.})$,则有下列结论：

证明 由于$\sum_{n=1}^{\infty}EZ_n^2<\infty$，有正数列$\alpha_n^*\to 0$ $(n\to\infty)$满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^*)^{-2}EZ_n^2<\infty.$$

令$a_n=\max(\alpha_n,\alpha_n^*)$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}E(a_n^{-2}Z_n^2)<\infty.$$

令$\xi_n=Z_n\cdot\operatorname{sgn}T_n$，这里$\operatorname{sgn}x$是符号函数，则

$$\sum_n E\xi_n^2<\infty,$$

$$E(\xi_n|X_1,\cdots,X_n)$$
$$=\operatorname{sgn}T_n\cdot E(Z_n|X_1,\cdots,X_n)=0\ (\text{a.s.}).$$

于是$\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ a.s.收敛。又

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(a_n^{-1}|\xi_n|\geq 1)\leq\sum_n E(a_n^{-2}\xi_n^2)<\infty.$$

故有 Ω_1 满足 $P(\Omega_1)=1$，对一切 $\omega\in\Omega_1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ 收敛，$|\xi_n(\omega)|\leqslant a_n$ （$n\geqslant N(\omega)$时）。可见，当$|T_n|\leqslant a_n$ 时，

$$|X_{n+1}|\leqslant 2a_n;$$

当 $T_n>a_n$ 时，

$$X_{n+1}=T_n+\xi_n\geqslant 0;$$

当 $T_n<-a_n$ 时，

$$-X_{n+1}=|T_n|+\xi_n\geqslant 0.$$

总之

$$\begin{aligned}|X_{n+1}|&\leqslant\max(2a_n,|T_n|+\xi_n)\\&\leqslant\max(2a_n,|X_n|+\xi_n-\gamma_n)\quad(\omega\in\Omega_1,\\&\qquad n\geqslant N(\omega)).\end{aligned}$$

利用引理6.1知

$$\overline{\lim_n}|X_n|\leqslant 2\overline{\lim_n}a_n.$$

但是 $a_n\leqslant \alpha_n+\alpha_n^*$，于是

$$\overline{\lim_n}|X_n|\leqslant 2\overline{\lim_n}\alpha_n.$$

证毕。

定理6.2 设$\{Y(x)\}$是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量族，$M(x)\triangleq EY(x)$是 Borel 可测函数，θ 是$M(x)=\alpha$ 的根，而且

1）$(x-\theta)(M(x)-\alpha)>0$ （一切 $x\neq\theta$）；

2）存在 k_1,k_2 满足

$$k_1|x-\theta|\leqslant|M(x)-\alpha|\leqslant k_2|x-\theta|;$$

3）$\sup_x D(Y(x))<\infty$， (6.4)

又

$$X_{n+1}=X_n-a_n(Y_n-\alpha)\quad(n\geqslant 1),\tag{6.5}$$

这里 X_1 是任意的常数（初值），$Y_n=Y(X_n)$是 $x=X_n$ 时 $Y(x)$ 的观测值，假定对一切 $n\geqslant 1$，

$$E\{(Y(X_n))^i|X_1,\cdots,X_n\}=f_i(X_n)\quad(\text{a.s.}),\tag{6.6}$$

这里

$$f_i(x)=E(Y(x))^i,\quad i=1,2.$$

常数列$\{a_n\}$满足：

$$a_n\geqslant 0,\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2<\infty,$$

则有下列结论：

$$\lim X_n=\theta\ \text{(a.s.)}. \tag{6.7}$$

证明 不失一般性，设$\alpha=0,\theta=0$（因为总可以用函数$M(x+\theta)-\alpha$代替$M(x)$）。设

$$T_n=X_n-a_nM(X_n),\quad Z_n=-a_n(Y_n-M(X_n))\ (n\geqslant 1),$$

则

$$X_{n+1}=T_n+Z_n,\quad E(Z_n|X_1,\cdots,X_n)=0\ \text{(a.s.)}.$$

但

$$\begin{aligned}EZ_n^2&=a_n^2E(Y_n-M(X_n))^2\\&=a_n^2E\{E\{(Y_n-M(X_n))^2|X_1,\cdots,X_n\}\}\\&=a_n^2E\{E(Y_n^2|X_1,\cdots,X_n)-(M(X_n))^2\}\\&=a_n^2E\{f_2(X_n)-M^2(X_n)\}\\&\leqslant a_n^2\sup_x D(Y(x)),\end{aligned}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}EZ_n^2<\infty.$$

取$\rho_n>0$ $(n\geqslant 1)$，使得$\rho_n\to 0$且$\sum_{n=1}^{\infty}\rho_na_n=\infty$。我们来证明下列不等式：$n\geqslant n_1(\omega)$时，

$$|T_n|\leqslant\max(\rho_n(1+k_2a_n),\ |X_n|-k_1a_n\rho_n), \tag{6.8}$$

这里$n_1(\omega)$足够大。

实际上，当$|X_n|\leqslant\rho_n$时，

$$|T_n|\leqslant\rho_n+k_2a_n\rho_n=(1+k_2a_n)\rho_n;$$

当$X_n>\rho_n$时，

$$T_n = X_n - a_n M(X_n) \geqslant X_n - a_n k_2 X_n$$
$$= (1 - a_n k_2) X_n \geqslant 0 \quad (n \text{ 充分大})。$$

于是

$$|T_n| = T_n \leqslant X_n - a_n k_1 X_n \leqslant |X_n| - k_1 a_n \rho_n;$$

当 $X_n < -\rho_n$ 时，

$$T_n = X_n - a_n M(X_n) \leqslant X_n + a_n k_2 |X_n|$$
$$\leqslant (1 - k_2 a_n) X_n \leqslant 0 \quad (n \text{ 充分大})。$$

从而

$$|T_n| = -T_n = -X_n + a_n M(X_n)$$
$$= |X_n| - a_n |M(X_n)|$$
$$\leqslant |X_n| - a_n k_1 |X_n| \leqslant |X_n| - k_1 a_n \rho_n.$$

总之，(6.8)成立。

根据(6.8)和定理6.1直接推出

$$P(\lim_n X_n = 0) = 1.$$

定理6.2证毕。

注1：在实际问题里，常常见到的情况是：在 $X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n$ 的条件下，$Y(X_n)$与$Y(x_n)$有相同的概率分布，此时条件(6.6)自然满足。

注2：从定理6.2的证明过程中可以看出，条件(6.4)和(6.6)分别用下面的(6.9)，(6.10)代替后，(6.7)仍然成立。

$$\sup_{n \geqslant 1} E(Y(X_n) - M(X_n))^2 < \infty, \tag{6.9}$$

$$E\{Y(X_n) | X_1, \cdots, X_n\} = M(X_n) \quad (\text{a.s.}). \tag{6.10}$$

特别，若 $\varepsilon_n = Y(X_n) - M(X_n)$ $(n \geqslant 1)$，$X_1 =$ 常数，$\{\varepsilon_n\}$ 相互独立且 $E\varepsilon_n = 0$ $(n \geqslant 1)$，$\sup\limits_{n \geqslant 1} E\varepsilon_n^2 < \infty$，则(6.9)，(6.10)都满足。

条件(6.4)是较强的限制，下一定理对这个条件予以放宽。

定理6.3（**Гладышев**，1965）　设$\{Y(x)\}$是$(\Omega, \mathscr{F}, P)$的随机变量族，$M(x) = EY(x)$是 Borel 函数，$M(\theta) = \alpha$ 而且

1) $\inf_{\delta < |x-\theta| < \delta^{-1}} (x-\theta)(M(x)-\alpha) > 0$ （一切 $\delta > 0$）；

2) 数列$\{a_n\}$满足：

$$a_n > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty;$$

3) $X_{n+1} = X_n - a_n(y_n - \alpha)$ $(n \geq 1)$,

其中 X_1 是任意的常数，$\{y_n\}$满足：

$$4)\ \begin{cases} E(y_n | X_1, y_1, \cdots, X_{n-1}, y_{n-1}, X_n) = M(X_n) \text{(a.s.)}, \\ E(y_n^2 | X_1, y_1, \cdots, X_{n-1}, y_{n-1}, X_n) \leq d(1 + X_n^2) \text{(a.s.)}. \end{cases}$$

（d 是常数），

则 $P(\lim_n X_n = \theta) = 1$ 且 $\lim_n E|X_n - \theta| = 0$。

证明 不失一般性，设 $\alpha = 0, \theta = 0$。令

$$c_n = \prod_{k=n}^{\infty} (1 + da_k^2),$$

$$k_n = \sum_{k=n}^{\infty} da_k^2 \prod_{m=k+1}^{\infty} (1 + da_m^2) \cdot (n \geq 1),$$

易知

$$1 \leq c_{n+1} \leq c_n < \infty,$$

$$0 \leq k_n \leq \exp\left\{\sum_1^{\infty} da_k^2\right\} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} da_k^2,$$

$$\lim_n k_n = 0, \quad \lim_n c_n = 1.$$

记

$$z_n = c_n X_n^2 + k_n,$$

$$\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, y_1, \cdots, X_{n-1}, y_{n-1}, X_n),$$

我们首先指出$(z_n, \mathscr{F}_n, n \geq 1)$是上鞅。实际上，

$$\begin{aligned} &E(X_{n+1}^2 | X_1, y_1, \cdots, X_{n-1}, y_{n-1}, X_n) \\ &= E(X_n^2 + a_n^2 y_n^2 - 2a_n X_n y_n | \mathscr{F}_n) \\ &= X_n^2 + a_n^2 E(y_n^2 | \mathscr{F}_n) - 2a_n X_n E(y_n | \mathscr{F}_n) \end{aligned}$$

$$\leqslant X_n^2 + a_n^2 d(1 + X_n^2) - 2a_n X_n M(X_n)$$

$$\leqslant X_n^2(1 + da_n^2) + da_n^2,$$

所以

$$\begin{aligned} E(z_{n+1} | \mathscr{F}_n) &= c_{n-1} E(X_{n+1}^2 | \mathscr{F}_n) + K_{n+1} \\ &\leqslant c_{n+1}[X_n^2(1 + da_n^2) + da_n^2] + K_{n+1} \\ &= c_n X_n^2 + K_n = z_n. \end{aligned}$$

可见$(z_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1)$是非负上鞅．故

$$\lim_n z_n = \xi \quad (\text{a.s.}),$$

从而$\lim\limits_n X_n^2 = \xi$.

下面将证明$\xi = 0$ (a.s.).

易知

$$\lim_n EX_n^2 = \lim_n Ez_n \leqslant Ez_1 = EX_1^2 < \infty.$$

由于

$$EX_{n+1}^2 \leqslant EX_n^2 + a_n^2 d(1 + EX_n^2) - 2a_n E(X_n M(X_n)).$$

故

$$EX_{n+1}^2 \leqslant EX_1^2 + \sum_{k=1}^{n} da_k^2(1 + EX_k^2) - 2\sum_{k=1}^{n} a_k E(X_k M(X_k)).$$

由于$X_k M(X_k) \geqslant 0$，于是

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k E(X_k M(X_k)) < \infty. \tag{7.9}$$

故有$K_1 < K_2 < \cdots$使得

$$\lim_i E(X_{k_i} M(X_{k_i})) = 0, \tag{7.10}$$

从而$i_1 < i_2 < \cdots$使得

$$\lim_l X_{k_{i_l}} M(X_{k_{i_l}}) = 0 \quad (\text{a.s.}). \tag{7.11}$$

这表明

$$\inf_l X_{i_{k_l}} M(X_{i_{k_l}})=0 \ (\text{a.s.}).$$

取$\delta>0$满足$\delta^{-1}>\sqrt{\xi}$，则从定理的假设知l充分大时

$$|X_{k_{i_l}}|\leqslant\delta,$$

于是

$$\lim_l X_{k_{i_l}}=0 \ (\text{a.s.}),$$

所以$\xi=0$ (a.s.)，即有

$$\lim_n X_n=0 \ (\text{a.s.}),$$

由于
$$\int_{\{|X_n|>c\}}|X_n|dP\leqslant\frac{1}{c}EX_n^2,$$
故

$$\lim_n E|X_n|=0.$$

定理6.3证毕。

令$\varepsilon_n=y_n-M(X_n)(n\geqslant1)$。不难看出，若$|M(x)|\leqslant A|x|+B$且$\{\varepsilon_n\}$是相互独立的随机变量列，$E\varepsilon_n=0$，$\sup\limits_n E\varepsilon_n^2<\infty$，则定理6.3的条件4)是满足的。

定理6.4 设$\{Y(x)\}$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$的随机变量族，函数$M(x)=EY(x)$在$x=\theta$处达到最大值且满足：

1) $|M'(x)|<C|x|+D$;

2) $(x-\theta)M'(x)<0 \ (x\neq\theta)$;

3) $\Delta(\delta)\triangleq\inf\limits_{|x-\theta|>\delta}|M'(x)|>0$ (一切$\delta>0$);

4) $\sup\limits_x D[Y(x)]<\infty$.

又$\{a_n\}$，$\{c_n\}$是正数列，满足：

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$，$\lim\limits_n c_n=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2c_n^{-2}<\infty$，设$X_1$是任意常数且

$$X_{n+1}=X_n-\frac{a_n}{c_n}(Y(X_n-c_n)-Y(X_n+c_n)) \quad (n\geqslant1),$$

这里 $Y(X_n \pm c_n)$ 是随机变量，满足

$$E\{[Y(X_n \pm c_n)]^i \mid X_1, \cdots, X_n\} = f_i(X_n \pm c_n) \quad (\text{a.s.}),$$

其中 $f_i(x) = E[Y(x)]^i$，$i = 1, 2$，则有下列结论：

$$P(\lim_n X_n = \theta) = 1.$$

证明 不失一般性，可设 $\theta = 0$（总可用 $Y(x+\theta)$ 代替 $Y(x)$ 进行讨论）。我们来验证定理6.1的条件是满足的。记

$$T_n = X_n + \frac{a_n}{c_n}[M(X_n + c_n) - M(X_n - c_n)],$$

$$z_n = \frac{a_n}{c_n}[Y(X_n + c_n) - M(X_n + c_n) - Y(X_n - c_n) + M(X_n - c_n)],$$

易知

$$E(Z_n \mid X_1, \cdots, X_n) = 0 \quad (\text{a.s.}),$$

$$\begin{aligned} EZ_n^2 &\leqslant 2\frac{a_n^2}{c_n^2}\{E[Y(X_n + c_n) - M(X_n + c_n)]^2 \\ &\quad + E[Y(X_n - c_n) - M(X_n - c_n)]^2\} \\ &\leqslant 4a_n^2 c_n^{-2} \sup_x D[Y(x)], \end{aligned}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} EZ_n^2 < \infty$。剩下是研究 T_n。注意：

$$T_n = X_n + 2a_n M'(X_n + \lambda c_n),$$

这里 λ 与 ω, n 有关，$|\lambda| \leqslant 1$。取 n_0 使得对一切 $n \geqslant n_0$，$c_n < 1$。任意给定 $\rho > 0$，下分三种情况讨论：

① $|X_n| \leqslant \rho$。此时

$$\begin{aligned} |T_n| &\leqslant \rho + 2a_n(A(|X_n| + 1) + B) \\ &\leqslant (1 + 2Aa_n)\rho + 2a_n(A + B) \quad (n\text{充分大}). \end{aligned}$$

② $X_n > \rho$。此时

$$\begin{aligned} T_n &\geqslant X_n - 2a_n(AX_n + A + B) \\ &> (1 - 2a_nA)\rho - 2a_n(A + B) > 0 \quad (n\text{充分大}), \end{aligned}$$

于是

$$|T_n| = T_n = X_n - 2a_n|M'(X_n + \lambda c_n)|$$

$$\leqslant |X_n| - 2a_n \Delta\left(\frac{1}{2}\rho\right) \quad (n\text{充分大})。$$

③ $X_n \leqslant -\rho$。此时

$$\begin{aligned} T_n &\leqslant X_n + 2a_n(A|X_n| - A + B) \\ &= (1 - 2a_n A)X_n + 2a_n(A + B) \\ &\leqslant -(1 - 2a_n A)\rho + 2a_n(A + B) \leqslant 0 \quad (n\text{充分大}), \end{aligned}$$

于是

$$|T_n| = -T_n = -X_n - 2a_n M'(X_n + \lambda c_n)$$

$$\leqslant |X_n| - 2a_n \Delta\left(\frac{1}{2}\rho\right) \quad (n\text{充分大})。$$

总之，无论哪种情况，只要 n 充分大均有

$$|T_n| \leqslant \max\left(\rho_n,\ |X_n| - 2a_n \Delta\left(\frac{1}{2}\rho\right)\right),$$

这里

$$\rho_n = \rho + 2a_n(A\rho + A + B)。$$

利用定理6.1知

$$\overline{\lim_n}\, |X_n| \leqslant \overline{\lim_n}\, \rho_n = \rho \quad (\text{a.s.})。$$

由于 ρ 可任意小，于是 $\lim\limits_n X_n = 0$ (a.s.)。证毕。

关于随机逼近的收敛性理论，现代有三个方面：一是研究 R-M 方法和 K W 方法的收敛速度。在一些附加条件下证出了重对数律等深入的定理，有兴趣的读者可参阅 Lai, T. L. et al. (1979)；二是减弱定理6.1, 6.2, 6.3中的条件；三是研究多元回归函数的有关估计问题，即研究随机变量族 $\{Y(x);\ x \in G\}$（G 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集）的期望 $M(x) = EY(x)$ 的零点或最大值点等问题。关于第二、第三点的研究情况可参阅陈翰馥(1981)

§7 一个序贯寻找问题

本节讨论医药试验中的一个具体问题，以便读者了解到序贯估计问题是多种多样的，需要针对具体情况进行具体分析。下面的叙述是基于 Eichhorn,B.H.(1972)的。

一般说来，药物的效力随着剂量的增加而增加，同时药物的"毒性"也随之增加。根据医生的临床经验，"毒性"不允许超过某临界值（阈值）。药物临床试验的目的是要找出"毒性"不超过阈值的最大剂量，这就是最优剂量的寻求问题。这个问题可用数学描述如下：

设对每个 x（药物的剂量），有一个随机变量 $Z(x)$（如药物的"毒性"）与之对应，设 η 是常数（毒性的阈值）。给定 $\gamma\in(0,1)$，令

$$\xi_\gamma=\sup\{x;\ P(Z(x)\leqslant\eta)\geqslant\gamma\},\tag{7.1}$$

这 ξ_γ 叫做容许水平是 γ 的最优值（最优剂量）。

我们要给出寻求 ξ_γ 的序贯方法。处理方式与§6中介绍的随机逼近相似，给出逼近 ξ_γ 的序列 $X_1,X_2,\cdots$。与通常的序贯估计和序贯检验不同，不给出停止法则，允许逼近步骤无限进行下去。对于逼近序列 $\{X_n\}$，我们自然提出下列基本要求：

① 适应性，即对一切 $n\geqslant1$，X_{n-1} 关于 σ 代数

$$\sigma(X_1,Z(X_1),\cdots,X_n,Z(X_n))$$

可测。

② 可行性，即对预先给定的 $\alpha\in(0,1)$，

$$P(X_n>\xi_\gamma)\leqslant\alpha\quad(一切\ n\geqslant1)。$$

③ 强相合性，即

$$P(\lim_n X_n=\xi_\gamma)=1。$$

我们的任务是找出符合这三条要求的逼近序列 $\Pi=\{X_n\}$。

我们只对药物试验中最常见到的数学上容易处理的统计模型进行讨论。

记 $Y(x)=\ln Z(x)$。假设 $Y(x)\sim N(a+bx,\sigma^2)$，$a,b$ 未知，σ 已知，$b\in[b^*,b^{**}]$，这里 $b^*<b^{**}$ 是两个已知正数。不失一般性，我们假设"毒性"的阈值 η 等于1（因为总可以对 $Z(x)$的值加以调整后办到这一点）。由于 $P(Z(\xi_\gamma)\leqslant\eta)=\gamma$，故

$$P(Y(\xi_\gamma)\leqslant 0)=\gamma.$$

从而

$$\Phi\left(-\frac{1}{\sigma}(a+b\xi_\gamma)\right)=\gamma,$$

这里 $\Phi(x)$是标准正态分布函数。于是有

$$\xi_\gamma=-\frac{a+\sigma z_\gamma}{b},\tag{7.2}$$

其中 z_γ 满足 $\Phi(z_\gamma)=\gamma$。我们假设已知 $\xi_\gamma\in[x^*,\infty)$。

我们来给出适应的逼近序列(剂量列)$X_1,X_2,\cdots$。取 $X_1=0$，$X_2=x^*$，当 $X_1,\cdots,X_n$ 确定后用下列办法确定 X_{n+1}。令

$$U_i=Y_i-a-bX_i\quad(i=1,2,\cdots),$$

这里 $Y_i=Y(X_i)$。

$$\bar{U}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}U_i,\quad Q_n=\sum_{i=1}^{n}(U_i-\bar{U}_n)^2\ (n\geqslant 2).$$

我们假定$\{U_i\}$是独立同分布的随机变量列，$U_1\sim N(0,\sigma^2)$。于是$\frac{1}{\sigma^2}Q_n$ 服从 $n-1$个自由度的 χ^2 分布。查 χ^2 分布表有

$$\lambda=\lambda_{1-\frac{1}{2}\alpha}(n-1)$$

满足

$$P(\sigma^{-2}Q_n\leqslant\lambda)=1-\frac{1}{2}\alpha.$$

易知

$$Q_n = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y}_n)^2 - 2b\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n)$$

$$+ b^2\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = C - 2bB + b^2A,$$

这里

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} Y_i, \quad \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} X_i,$$

$$C = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y}_n)^2, \quad B = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n),$$

$$A = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Q_n 是 b 的凸函数。解方程 $Q_n = \lambda\sigma^2$ 得

$$b_1 = \frac{1}{A}\left(B - \sqrt{B^2 - A(C - \lambda\sigma^2)}\right),$$

$$b_2 = \frac{1}{A}\left(B + \sqrt{B^2 - A(C - \lambda\sigma^2)}\right).$$

当 $B^2 - A(C - \lambda\sigma^2) \geqslant 0$，即 $\lambda \geqslant \frac{\sigma^{-2}}{A}(AC - B^2)$ 时，$Q_n \leqslant \lambda\sigma^2$ 的充要条件是 $b \in [b_1, b_2]$。

因为事先已知道 $b \in [b^*, b^{**}]$，令

$$b_n^{(i)} = \min[\max(b_i, b^*), b^{**}] \quad (i = 1, 2).$$

当 $B^2 - A(C - \lambda\sigma^2) < 0$时，令

$$b_n^{(1)} = b^*, \quad b_n^{(2)} = b^{**}.$$

总之有

$$P\{b \in [b_n^{(1)}, b_n^{(2)}]\} \geqslant 1 - \frac{\alpha}{2}. \tag{7.3}$$

记 $M(x) = a + bx$，由于 $\bar{U}_n = \bar{Y}_n - M(\bar{X}_n)$，故

$$P(M(\bar{X}_n) \in M_{a,n}) = 1 - \frac{1}{2}\alpha,$$

这里

$$M_{\alpha n}=\overline{Y}_n+z_{1-\frac{1}{2}\alpha}\frac{1}{\sqrt{n}}\sigma,$$

$$\Phi(z_{1-\frac{1}{2}\alpha})=1-\frac{1}{2}\alpha.$$

于是

$$P(a+b\overline{X}_n\leqslant M_{\alpha,n},b\in[b_n^{(1)},b_n^{(2)}])\geqslant 1-\alpha,$$

从而

$$P(\xi_\gamma\geqslant\overline{X}_n-\frac{1}{b}(\sigma z_\gamma+M_{\alpha,n}),b\in[b_n^{(1)},b_n^{(2)}])\geqslant 1-\alpha.$$

令

$$\eta_{n+1}=\overline{X}_n-\frac{1}{b_n}(\sigma z_\gamma+M_{\alpha,n}),$$

$$X_{n+1}=\max(\eta_{n+1},x^*),\qquad(7.4)$$

这里

$$b_n=\begin{cases}b_n^{(1)}, & \text{当 } M_{\alpha,n}+\sigma z_\gamma>0,\\ b_n^{(2)}, & \text{当 } M_{\alpha n}+\sigma z_\gamma<0.\end{cases}$$

易知 $P(\xi_\gamma\geqslant\eta_{n+1})\geqslant 1-\alpha$。由于 $\xi_\gamma\geqslant x^*$，故

$$P(\xi_\gamma\geqslant X_{n+1})\geqslant 1-\alpha.$$

按递推公式(7.4)就可得到序列$\{X_n\}$,它当然是可行的。下面证明$\{X_n\}$是强相合的，即

$$P(\lim_n X_n=\xi_\gamma)=1.$$

从 $M_{\alpha,n}$ 的定义知

$$M_{\alpha,n}=a+b\overline{X}_n+\overline{U}_n+z_{1-\frac{1}{2}\alpha}\frac{1}{\sqrt{n}}\sigma,$$

于是

$$\eta_{n+1}=\overline{X}_n+c_n(\xi_\gamma-\overline{X}_n)+\varepsilon_n,\qquad(7.5)$$

这里

$$c_n=b_n^{-1}b,$$

$$\varepsilon_n = -b_n^{-1}\left\{\zeta_n + z_{1-\frac{1}{2}\alpha}\sqrt{\frac{1}{n}}\,\sigma\right\}(n\geqslant 1),$$

由于 $b_n\in[b^*,b^{**}]$，

$$0<(b^{**})^{-1}b^*\leqslant c_n\leqslant(b^*)^{-1}b^{**}.$$

记 $c=(b^{**})^{-1}b^*$，当然 $0<c<1$。显然 $\lim\limits_n \varepsilon_n=0$(a.s.) 且 $E\varepsilon_n^2=O\left(\frac{1}{n}\right)$，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|\varepsilon_n|<\infty\text{(a.s.)}.$$

于是对任何$\delta>0,\varphi>0$，存在 $n_0>c^{-1}$ 及$\Omega_1\subset\Omega$满足：$P(\Omega_1)>1-\varphi$。对一切 $n\geqslant n_0$ 及 $\omega\in\Omega_1$ 有

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n+j}|\varepsilon_{n+j}|<\frac{\delta}{4},\quad |\varepsilon_n|<\frac{1}{2}\delta,\ \sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{x^*}{n(n+1)}<\frac{1}{4}\delta.\tag{7.6}$$

我们来证明：对一切 $\omega\in\Omega_1$，有

$$\varlimsup_n|\bar X_n-\xi_\gamma|\leqslant\delta.\tag{7.7}$$

以下恒设$\omega\in\Omega_1,n\geqslant n_0$。首先指出：

$$|\bar X_{n+1}-\xi_\gamma|\leqslant|\bar X_n-\xi_\gamma|+\frac{1}{n(n+1)}x^*+\frac{1}{n+1}|\varepsilon_n|.\tag{7.8}$$

实际上，若 $X_{n+1}\neq x^*$，则 $X_{n+1}=\eta_{n+1}$，于是

$$\bar X_{n+1}=\frac{n}{n+1}\bar X_n+\frac{1}{n+1}\eta_{n+1}$$

$$=\bar X_n+\frac{1}{n+1}c_n(\xi_\gamma-\bar X_n)+\frac{1}{n+1}\varepsilon_n$$

故

$$|\bar X_{n+1}-\xi_\gamma|\leqslant\left|(\bar X_n-\xi_\gamma)\left(1-\frac{1}{n+1}c_n\right)\right|+\frac{1}{n+1}|\varepsilon_n|$$

$$\leqslant |\bar{X}_n - \xi_\gamma| + \frac{1}{n+1}|\varepsilon_n|;$$

若 $X_{n+1} = x^*$，则

$$\begin{aligned}
\bar{X}_{n+1} - \xi_\gamma &= \bar{X}_n - \xi_\gamma + \frac{1}{n+1}(x^* - \bar{X}_n) \\
&\leqslant \bar{X}_n - \xi_\gamma + \frac{1}{n+1}\left(x^* - \frac{n-1}{n}x^*\right) \\
&= \bar{X}_n - \xi_\gamma + \frac{1}{n(n+1)}x^*.
\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}
\bar{X}_{n+1} - \xi_\gamma &\geqslant \bar{X}_n - \xi_\gamma + \frac{1}{n+1}c_n(\xi_\gamma - \bar{X}_n) + \frac{1}{n+1}\varepsilon_n \\
&\geqslant (\bar{X}_n - \xi_\gamma)\left(1 - \frac{1}{n+1}c_n\right) + \frac{\varepsilon_n}{n+1},
\end{aligned}$$

总之

$$|\bar{X}_{n+1} - \xi_\gamma| \leqslant |\bar{X}_n - \xi_\gamma| + \frac{|\varepsilon_n|}{n+1} + \frac{x^*}{n(n+1)}.$$

故(7.8)成立。

从(7.8)和(7.6)知

$$|\bar{X}_{n+m} - \xi_\gamma| \leqslant |\bar{X}_n - \xi_\gamma| + \frac{1}{2}\delta\,(m \geqslant 0).$$

现在证明：必存在 $n_1 \geqslant n_0$，使得

$$|\bar{X}_{n_1} - \xi_\gamma| < \frac{\delta}{2}.$$

用反证法。若对一切 $n \geqslant n_0$ 均有

$$|\bar{X}_n - \xi_\gamma| \geqslant \frac{\delta}{2},$$

则存在以下两种情况：

① 存在 $n_2\geqslant n_0$，使得 $\bar{X}_{n_2}<\xi_\gamma$；

② 对一切 $n\geqslant n_0$，有 $\bar{X}_n\geqslant\xi_\gamma$。

先研究情况①。我们首先指出 $\bar{X}_{n_2+1}<\xi_\gamma$。实际上，若 $X_{n_2+1}=x^*$，则

$$\bar{X}_{n_2+1}=\frac{n_2}{n_2+1}\bar{X}_{n_2}+\frac{1}{n_2+1}x^*$$

$$<\frac{n_2}{n_2+1}\xi_\gamma+\frac{1}{n_2+1}\xi_\gamma=\xi_\gamma;$$

若 $X_{n_2+1}\neq x^*$，则

$$\bar{X}_{n_2+1}=\frac{n_2}{n_2+1}\bar{X}_{n_2}+\frac{1}{n_2+1}\eta_{n_2+1}$$

$$=\bar{X}_{n_2}+\frac{1}{n_2+1}c_{n_2}(\xi_\gamma-\bar{X}_{n_2})+\frac{1}{n_2+1}\varepsilon_{n_2}$$

$$<\bar{X}_{n_2}+(\xi_\gamma-\bar{X}_{n_2})+\frac{\delta}{2}$$

$$=\xi_\gamma+\frac{\delta}{2}.$$

再从(7.11)知 $\bar{X}_{n_2+1}<\xi_\gamma$。由归纳法可推知

$$\bar{X}_{n_2+m}<\xi_\gamma\ (m\geqslant 0).$$

但是

$$\bar{X}_{n+1}\geqslant\frac{n}{n+1}\bar{X}_n+\frac{1}{n+1}\eta_{n+1}$$

$$=\bar{X}_n+\frac{1}{n+1}c_n\cdot(\xi_\gamma-\bar{X}_n)+\frac{1}{n+1}\varepsilon_n,$$

于是

$$\bar{X}_{n_2+m}\geqslant\bar{X}_{n_2}+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{n_2+j+1}c_{n_2+j}(\xi_\gamma-\bar{X}_{n_2+j})$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{n_2+j+1}\varepsilon_{n_2+j}$$

$$\geqslant\bar{X}_{n_2}+\frac{\delta c}{2}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{n_2+j+1}-\frac{\delta}{4}.$$

取 m 足够大可使 $\overline{X}_{n_2+m}<\xi_\gamma-\frac{1}{2}\delta$。这与(7.11)相冲突。

现在研究情形 2。此时从(7.11)知

$$\overline{X}_n\geqslant\xi_\gamma-\frac{1}{2}\delta(n\geqslant n_0).$$

我们可以证明下列不等式：

$$\overline{X}_{n+1}\leqslant\overline{X}_n-\left(\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{\delta c}{2}+\frac{1}{n+1}|\varepsilon_n|(n\geqslant n_0).$$

于是

$$\overline{X}_{n_0+m}\leqslant\overline{X}_{n_0}-\frac{\delta c}{2}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{n_0+j+1}+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{|\varepsilon_{n_0+j}|}{n_0+j+1}$$

$$\leqslant\overline{X}_{n_0}-\frac{\delta c}{2}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{n_0+j+1}+\frac{\delta}{4}.$$

取 m 足够大可使得 $\overline{X}_{n_0+m}<\xi_\gamma$。这与一切 $\overline{X}_n\geqslant\xi_\gamma+\frac{1}{2}\delta$ 相冲突。

总之，一定存在 $n_1\geqslant n_0$，使得(7.10)成立。利用(7.10)和(7.9)知，对一切 $n\geqslant n_1$，$|\overline{X}_n-\xi_\gamma|<\delta$，这就证明了(7.7)成立。注意 $P(\Omega_1)>1-\varphi$，而 φ 与 δ 可任意小，所以

$$\lim_n\overline{X}_n=\xi_\gamma\,(\text{a.s.}).$$

利用（7.5）知

$$\lim_n X_{n+1}=\lim_n\max(\eta_{n+1},x^*)=\max(\xi_\gamma,x^*)=\xi_\gamma\,(\text{a.s.}).$$

这就证明了序列 $H=\{X_n,n\geqslant1\}$ 是强相合的。

例7.1 设随机变量 $Y(x)\sim N(a+bx,\sigma^2)$，$a=-10$，$b=3$，$\sigma=1$。设 $\gamma=0.99$。从(7.2)知 $\xi_\gamma=2.558$。取 $\alpha=0.05$。$X_1=0$，$X_2=x^*=1$。

若 $X_1,\cdots,X_n$ 已确定($n\geqslant2$)，则

$$Y_n=a+bX_n+U_n=-10+3X_n+U_n.$$

利用随机模拟法可得到标准正态随机变量 U_n 的值，从而 Y_n 的值

可确定。再利用递推公式(7.4)可确定出 X_{n+1}。这样可得到序列$\{X_n\}$，其前面 50 项见表 7.1。

表7.1　X_n 的值

n	X_{n+1}	n	X_{n+1}	n	X_{n+1}
2	1.121	19	2.254	36	2.314
3	1.333	20	2.266	37	2.325
4	1.542	21	2.255	38	2.311
5	1.572	22	2.248	39	2.315
6	1.738	23	2.246	40	2.315
7	1.832	24	2.239	41	2.312
8	1.872	25	2.265	42	2.331
9	2.029	26	2.305	43	2.341
10	2.025	27	2.313	44	2.350
11	2.064	28	2.332	45	2.364
12	2.058	29	2.333	46	2.371
13	2.068	30	2.327	47	2.375
14	2.074	31	2.320	48	2.371
15	2.195	32	2.330	49	2.336
16	2.187	33	2.327	50	2.379
17	2.181	34	2.323		
18	2.202	35	2.319		

从这个表看出，当 n 较大时，X_{n+1} 与 ξ_p 的理论值 2.558 很接近。

本节中恒设 $Y(x)$的方差 σ^2 已知而且与 x 无关。若 σ 未知或者与 x 有关，尚需另行研究。

§8　补充与习题

(1) 设随机变量X的分布密度(关于勒贝格测度)为

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma}\,g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\quad(-\infty<x<\infty),$$

其中 μ,σ 是未知参数，$\mu\in(-\infty,\infty),\sigma\in(0,\infty)$。

给定 $0<\alpha<1,d>0$。试证明：不管样本量多么大，对 μ 不存在固定样本量情形下的置信区间使得区间长度不超过 d 而置信水平为 $1-\alpha$。

(2) 设 X 的分布密度为

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma}I_{(\mu,\infty)}(x)\exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}.$$

给定 $\alpha\in(0,1),d>0$。第一阶段：取定正整数 $k\geqslant2$，取 X 的简单随机样本 $x_1,x_2,\cdots,x_k$，令

$$x_1^{(k)}=\min(x_1,\cdots,x_k),$$

$$U_k=\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i-x_1^{(k)}),$$

$$b_k=(k-1)\left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k-1}}-1\right],$$

$$\tau=\max(k,\langle d^{-1}b_kU_k\rangle),$$

这里 $\langle x\rangle$ 表示不小于 x 的最小整数。

第二阶段：根据 τ 的值抽取 X 的样本 $x_{k+1},\cdots,x_\tau$，令

$$I=[x_1^{(\tau)}-d,x_1^{(\tau)}],$$

其中

$$x_1^{(\tau)}=\min(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1},\cdots,x_\tau).$$

可以证明

$$P(\mu\in I)\geqslant1-\alpha. \tag{8.1}$$

实际上，若 $x_1,\cdots,x_n$ 是 X 的简单随机样本，则可以证明：对任何 $1\leqslant k\leqslant n$，$x_1^{(n)}$ 与 $\sum_{i=1}^{k}(x_i-x_1^{(k)})$ 相互独立且

$$2\sum_{i=1}^{k}\frac{(x_i-x_1^{(k)})}{\sigma}\sim\chi^2(2k-2).$$

由于

$$\tau = t\left(\sum_{i=1}^{k}(x_i - x_1^{(k)})\right),$$

故 τ 与 $x_1^{(n)}$ 相互独立（$n \geq k$ 时）。从而

$$P(\mu \in I) = P(x_1^{(\tau)} - d \leq \mu \leq x_1^{(\tau)})$$

$$= P\left(0 \leq \frac{x_1^{(\tau)} - \mu}{\sigma} \leq \frac{d}{\sigma}\right)$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} P\left(\tau = n, \frac{x_1^{(n)} - \mu}{\sigma} \leq \frac{d}{\sigma}\right)$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} P(\tau = n) P\left(\frac{x_1^{(n)} - \mu}{\sigma} \leq \frac{d}{\sigma}\right)$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} P(\tau = n)(1 - e^{-n\sigma^{-1}d})$$

$$= 1 - Ee^{-\sigma^{-1}d\tau}$$

$$\geq 1 - Ee^{-\sigma^{-1}b_k U_k}。$$

不难看出，

$$Ee^{-\sigma^{-1}b_k U_k} = E\exp\left\{-\frac{b_k}{2(k-1)} \cdot 2\sigma^{-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - x_1^{(k)})\right\}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\frac{b_k}{2(k-1)}x} g_{2k-2}(x)\mathrm{d}x,$$

$$= \left(1 + \frac{b_k}{k-1}\right)^{-(k-1)} = \alpha,$$

$g_{2k-2}(x)$ 是 $\chi^2(2k-2)$ 分布的密度函数．所以(8.1)成立。

第一阶段的 k 应取多大？Mukhopadhyay(1988)指出，应取

$$k = \max(2, <(d^{-1}|\ln\alpha|)^{1/(1+\gamma)}>),$$

其中 $\gamma \in (0, \infty)$。

(3) 设 $x_1, x_2, \cdots$ 是独立同分布的随机变量列，$x_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$．

μ,σ^2均未知。令

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2 \quad (n \geqslant 2),$$

$$L_n = (\bar{x}_n - \mu)^2 + cn \quad (c > 0),$$

这里$(\bar{x}_n - \mu)^2$是用$\bar{x}_n$估计μ引起的损失，c表示单次观测的费用，L_n就是总损失。总风险是

$$R(n,\sigma,c) = EL_n = n^{-1}\sigma^2 + cn,$$

它在$n \approx n^* = \sigma c^{-1/2}$时达到最小值。这时最小风险近似等于

$$R^*(\sigma,c) = R(n^*,\sigma,c) = 2cn^*.$$

由于σ是未知的，n^*无法求出。应该设法找停止法则τ使得

$$R_\tau(\sigma,c) \triangleq E\{(\bar{x}_\tau - \mu)^2 + c\tau\}$$

尽可能地小。

令

$$\tau = \inf\{n;\ n \geqslant k_0 \text{ 且 } n \geqslant c^{-1/2} s_n\},$$

这里k_0是不小于2的正整数，s_n是s_n^2的正平方根。可以证明，当$k_0 \geqslant 4$时

$$R_\tau(\sigma,c) - R^*(\sigma,c) = \frac{c}{2} + o(c) \quad (c \to 0),$$

$$E\tau = n^* + O(1) \quad (c \to 0)$$

（参看 Ghosh and Sen(1991)的第十章）。

(4) 设$x_1, x_2, \cdots$是独立同分布的随机变量列，x_1服从Poisson分布，即

$$P(x_1 = k) = \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda} \quad (k = 0,1,\cdots),$$

其中λ是未知参数，$\lambda \in (0,\infty)$。

假设用 $\bar{x}_n=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 估计 λ 引起的损失为 $(\bar{x}_n-\lambda)^2$，单次观测的费用为 c（正数），则 n 次观测引起的总损失为

$$L_n=(\bar{x}_n-\lambda)^2+cn,$$

故总风险为

$$R(n,\lambda,c)=n^{-1}\lambda+cn,$$

它在 $n\approx n^*=(c^{-1}\lambda)^{1/2}$ 时达到最小值。这时最小风险近似等于

$$R^*(\lambda,c)=R(n^*,\lambda,c)=2(\lambda c)^{\frac{1}{2}}.$$

由于 λ 未知，n^* 不能求出，自然应考虑停时

$$\tilde{\tau}=\inf\{n:\ n\geqslant\gamma \text{ 且} cn^2\geqslant\bar{x}_n\},\text{这里 } \gamma=c^{-1/3}.$$

用 $\bar{x}_{\tilde{\tau}}$ 估计 λ 造成的总风险为

$$\tilde{R}(\lambda,c)=E(L_{\tilde{\tau}}).$$

可以证明

$$\tilde{R}(\lambda,c)-R^*(\lambda,c)=O(c)\quad(c\to 0),$$

参看Ghosh and Sen(1991)的第十章。

(5) 考虑线性模型

$$y_i=x_i'\beta+\varepsilon_i,\quad i=1,2,\cdots,$$

这里 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots$ 是独立同分布随机变量列，$\varepsilon_1\sim N(0,\sigma^2)$，$\sigma$ 和 $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_p)'$ 都是未知的。$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是已知的列向量。令

$$X_n'=(x_1,\cdots,x_n),\quad Y_n'=(y_1,\cdots,y_n).$$

假设 $X_n'X_n$ 是满秩的，则 β 的最小二乘估计为

$$\hat{\beta}_n=(X_n'X_n)^{-1}X_n'Y_n.$$

设用 $\hat{\beta}_n$ 估计 β 引起的损失与观测费用之和为

$$L_n=n^{-1}(\hat{\beta}_n-\beta)'X_n'X_n(\hat{\beta}_n-\beta)+nc\quad(c>0),$$

则总风险为

$$R_n=EL_n=n^{-1}p\sigma^2+nc.$$

易知

$$n\approx n^*=(c^{-1}p\sigma^2)^{1/2}$$

时 R_n 最小且

$$R_{n^*}=2\sqrt{cp\sigma^2}.$$

由于 σ 未知，n^* 不能求出，自然想到用

$$S_n=\frac{1}{n-p}(Y_n-X_n\beta_n)'(Y_n-X_n\beta_n)$$

去估计 σ^2。考虑停时

$$\tau=\inf\{n;\ \ n\geqslant k_0 \text{ 且 } n\geqslant(c^{-1}pS_n)^{\frac{1}{2}}\},$$

其中 $k_0\geqslant p+1$。我们用 τ 作为停止法则，用 β_τ 作为 β 的估计量，用 $\tilde{R}$ 表示这时的总风险。可以证明

$$\tilde{R}-R_{n^*}=\frac{c}{2}+o(c)\ \ (c\to 0),$$

参看 Ghosh and Sen(1991)的第十章。

第四章 贝叶斯序贯统计判决

§1 贝叶斯统计判决的存在性

关于统计中的贝叶斯（Bayes）方法，读者从普通的统计书里已有了解（参看陈希孺（1981））。我们简略地叙述一下。假定 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体密度为 $f(x_1,\cdots,x_n;\theta)$ 的样本，其中 θ 是未知的。经典方法把参数 θ 看作是客观存在的常数，通过对样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的研究，对 θ 给出估计值或者推断 θ 是否属于某个给定的范围。贝叶斯方法认为参数 θ 也是随机的，总体的分布密度 $f(x_1,\cdots,x_n;\theta)$ 应看成是 θ 给定时，$X_1,\cdots,X_n$ 对 θ 的条件密度，即

$$f(x_1,\cdots,x_n;\theta)=f(x_1,\cdots,x_n|\theta).$$

如果 θ 的边缘分布——称为先验分布——是已知的，设为 $\xi(d\theta)$，于是根据概率论中的贝叶斯公式（严密的叙述和证明见下面）就可以求出 θ 对样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的条件分布——称为后验分布——记为 $h(\theta|x_1,\cdots,x_n)$。在此基础上就可以对参数 θ 进行估计与推断。

自从 1763 年贝叶斯论文公布以后，两百年来统计界关于贝叶斯方法的合理性一直有争论，并且已形成了贝叶斯学派与非贝叶斯学派。叙述贝叶斯方法的书很多，关于贝叶斯方法的合理性以及如何确定先验分布的问题迄今已有很多研究成果，可参看 De Groot(1970)及 Berger(1980)诸人的著作。但是争论还没有结束，本书作者认为，贝叶斯方法是很重要的，对于小样本情形下的统计推断，不利用贝叶斯方法似乎难有好的出路。

本书不讨论贝叶斯方法的哲学基础以及先验分布应如何选

取，只是从纯数学的角度叙述贝叶斯判决问题的精确提法，在十分广泛的条件下，严格证明贝叶斯判决的存在性。本节只讨论非序贯的情形，从下一节起讨论序贯情形。本节中的许多定理有普遍意义，在统计学、概率论、控制论中均有很多应用。

给定三个可测空间：观察空间$(\mathscr{X},\mathscr{B}_x)$，参数空间$(\Theta,\mathscr{B}_\theta)$，行动空间$(A,\mathscr{B}_A)$及概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P_\theta)$ $(\theta\in\Theta)$，这里$\mathscr{B}_x$，$\mathscr{B}_\theta$，$\mathscr{B}_A$，$\mathscr{F}$都是σ代数.我们假定当$B\in\mathscr{F}$时$P_\theta(B)$是$(\Theta,\mathscr{B}_\theta)$上可测的，$X(\omega)$是$(\Omega,\mathscr{F})$到$(\mathscr{X},\mathscr{B}_x)$的可测映射，我们能观察到的是$X(\omega)$的值。损失函数$L(\theta,d)$是乘积空间$(\Theta\times A,\mathscr{B}_\theta\otimes\mathscr{B}_A)$上的非负可测函数。称$(\Theta,\mathscr{B}_\theta)$上的概率测度为先验分布，称$(\mathscr{X},\mathscr{B}_x)$到$(A,\mathscr{B}_A)$的可测映射$\delta$为判决法则。称判决法则$\delta^*$是针对先验分布$\xi$的贝叶斯(判决)法则，若对一切判决法则$\delta$有$R_\xi(\delta^*)\leqslant R_\xi(\delta)$，这里

$$R_\xi(\delta)\triangleq\int_\Theta\int_\Omega L(\theta,\delta[X(\omega)])P_\theta(\mathrm{d}\omega)\xi(\mathrm{d}\theta)\qquad(1.1)$$

是法则δ下的平均损失(叫做δ的风险)。

本节的主要目的是证明在十分广泛的条件下贝叶斯法则δ^*是存在的。在研究贝叶斯法则的时候,后验分布的概念特别重要。

定义1.1 称可测空间$(S,\mathscr{B}_S)$是Borel空间，若存在可分完全距离空间E，使得S是E中的Borel集，并且$\mathscr{B}_S$由S之所有Borel子集组成①。

定义1.2 称$Q(\cdot|x)$是先验分布为ξ，$X(\omega)=x$条件下θ的后验分布，若它满足：

1) 对任何$x\in\mathscr{X}$，$Q(\cdot|x)$是$\mathscr{B}_\theta$上的概率测度；

2) 对任何固定的$B\in\mathscr{B}_\theta$，$Q(B|x)$是x的$\mathscr{B}_x$可测函数；

3) 对任何$E\in\mathscr{B}_x$，$B\in\mathscr{B}_\theta$，有

$$\int_B P_\theta(X(\omega)\in E)\xi(\mathrm{d}\theta)=\int_E Q(B|x)p^\xi(\mathrm{d}x),$$

① 文献中"Borel空间"一词有几种不同的定义，我们的定义比较具体，便于使用。

这里

$$p^{\xi}(E)=\int_{\Theta}P_{\theta}(X(\omega)\in E)\xi(d\theta)$$

是随机元 $X(\omega)$ 的（绝对）分布。

我们首先证明条件分布的存在定理。

定理1.1 设 $X(\omega)$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 到可测空间 $(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}})$ 中的可测映射，$Y(\omega)$ 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 到 Borel 空间 $(E,\mathscr{B})$ 中的可测映射，则存在函数 $P(x,B)$ 满足：

1）$P(x,\cdot)$ 是 $\mathscr{B}$ 上的概率测度（对一切 $x\in\mathscr{X}$）；

2）$P(\cdot,B)$ 是 $\mathscr{B}_{\mathscr{X}}$ 可测的（对一切 $B\in\mathscr{B}$）；

3）对一切 $B\in\mathscr{B}$，有

$$P\{Y\in B|X\}=P(X(\omega),B)\ \text{(a.s.)}.$$

证明 首先考虑一个特殊情形：$E=\boldsymbol{R}=(-\infty,\infty)$，$\mathscr{B}$ 由一切一维 Borel 集组成。Q 乃全体有理数组成之集。

对每个有理数 r，取定条件概率 $P(Y<r|X)$。它是 $\sigma(X)$ 可测的，故有 $(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}})$ 上可测函数 $g_r(x)$，使得

$$P(Y<r|X)=g_r(X(\omega)).$$

令

$$N_{r',r}=\{x:\ g_{r'}(x)\geqslant g_r(x)\}\qquad (r'>r)$$

$$N_r=\{x:\ \lim_{m\to\infty}g_{r-\frac{1}{m}}(x)=g_r(x)\},$$

$$N_-=\{x:\ \lim_{l\to-\infty}g_l(x)=0\},$$

$$N_+=\{x:\ \lim_{l\to\infty}g_l(x)=1\},$$

$$B\triangleq N_-\bigcap N_+\bigcap\Big(\bigcap_{r\in Q}N_r\Big)\bigcap\Big(\bigcap_{\substack{r'>r\\ r',r\in Q}}N_{r',r}\Big).$$

我们来证明 $P(X\in B)=1$。实际上

$$P\{Y<r'|X\}\geqslant P\{Y<r|X\}\ \text{(a.s.)}.$$

故

$$P(X\in N_{r',r})=1,$$

类似推理知

$$P(X\in N_r)=1,\qquad P(X\in N_-)=1,$$
$$P(X\in N_-)=1.$$

所以

$$P(X\in B)=1.$$

当 $x\in B$，t 是无理数时，令

$$g_t(x)=\sup_{\substack{r<t\\ r\in Q}} g_r(x).$$

当 $x\notin B$ 时，任取定 $x_0\in B$。令

$$g_u(x)=g_u(x_0)\quad(\text{一切 } u).$$

易知对每个 x，$g_u(x)$ 是 u 的增函数，左连续，且

$$\lim_{u\to-\infty} g_u(x)=0,\qquad \lim_{u\to\infty} g_u(x)=1.$$

故有 $\mathscr{B}$ 上概率测度 $p(x,\cdot)$ 使得

$$P(x,(-\infty,u))=g_u(x)\quad(\text{一切 } u),$$

于是对每个有理数 r，

$$P(Y<r\mid X)=p(X(\omega),(-\infty,r))\quad(\text{a.s}).$$

由此易推知，对任何 Borel 集 A，

$$P(Y\in A\mid X)=p(X(\omega),A)\quad(\text{a.s.}).$$

也不难推知，对任何 Borel 集 A，$p(x,A)$ 是 x 的 $\mathscr{B}_x$可测函数。

现在考虑一般情形。设 $(E,\mathscr{B})$ 是任一 Borel 空间。可以证明存在从 $(E,\mathscr{B})$ 到 $(R,\mathscr{B}_R)$ 中的一一可测映射 $f(\cdot)$。利用 Kuratowski 定理知，对任何 $B\in\mathscr{B}$，

$$f(B)\triangleq\{y:\ \text{存在 } x\in B \text{ 使得 } y=f(x)\}\in\mathscr{B}_R.$$

令 $Z(\omega)=f(Y(\omega))$。则 $Z(\omega)$ 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 到 $(R,\mathscr{B}_R)$ 的可测函数。根据前面已证明的部分知存在函数 $\bar{p}(x,A)$，满足：

1) $\bar{p}(x,\cdot)$ 是 $\mathscr{B}_R$ 上的概率测度；

2) $\bar{p}(\cdot,A)$ 是 $\mathscr{B}_x$可测的 $(A\in\mathscr{B}_R)$；

3) $P(Z\in A\mid X)=\bar{p}(X(\omega),A)$ (a.s.)。

令

$$p(x,B)=\bar{p}(x,f(B)) \quad (B\in\mathscr{B}).$$

易知 $p(x,B)$ 对 x 是 $\mathscr{B}_x$ 可测的. $p(x,B)$ 是 B 的概率测度. 且

$$P(Y\in B|X)=P\{Z\in f(B)|X\}=\bar{p}(X(\omega),f(B))$$
$$=p(X(\omega),B) \quad (\text{a.s.}).$$

定理1.1证毕.

给定 $(\Theta,\mathscr{B}_\theta)$ 上的先验分布 ξ 及概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P_\theta)$ ($\theta\in\Theta$, $P_\theta(A)$ 是 θ 的 $\mathscr{B}_\theta$ 可测函数). 令 $\tilde{\Omega}=\Theta\times\Omega$, $\tilde{\mathscr{F}}=\mathscr{B}_\theta\otimes\mathscr{F}$ (乘积 σ 代数). 易知在 $\tilde{\mathscr{F}}$ 上存在唯一的概率测度 $\bar{p}$ 满足: 对任何 $B\in\mathscr{B}_\theta$, $A\in\mathscr{F}$,

$$\bar{p}(B\times A)=\int_B P_\theta(A)\xi(\mathrm{d}\theta).$$

令

$$\tilde{\theta}(\theta,\omega)=\theta, \qquad \tilde{X}(\theta,\omega)=X(\omega).$$

从定理1.1直接得到以下定理:

定理1.2 设 $(\Theta,\mathscr{B}_\theta)$ 是 Borel 空间, 则存在 $Q(B|x)$ 满足: $Q(B|x)$ 对 x 是 $\mathscr{B}_x$ 可测, 对 B 是概率测度, 且

$$\bar{p}(\tilde{\theta}\in B|\tilde{X})=Q(B|\tilde{X}) \quad (\text{a.s.}\ \bar{p}).$$

从定义1.1知这里的 $Q(B|x)$ 就是先验分布是 ξ 时, $X(\omega)=x$ 的后验分布.

以后记后验分布 $Q(\cdot|x)$ 为 $\xi(\cdot|x)$ (或 $\xi(x)$) 以体现与先验分布 ξ 的联系.

在许多统计推断问题里, 需要求出后验分布的分布密度. 我们有以下重要的定理:

定理1.3 设 ξ 是 Borel 空间 $(\Theta,\mathscr{B}_\theta)$ 上的概率分布 (即先验分布). $X(\omega)$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P_\theta)$ 到 $(\mathscr{X},\mathscr{B}_x)$ 的可测映射 (随机元), $P_\theta(\cdot)$ 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率测度. 假设存在乘积空间 $(\Theta\times\mathscr{X},\mathscr{B}_\theta\otimes\mathscr{B}_x)$ 上的非负可测函数 $p(\theta,x)$ 满足

$$P_\theta(X\in B)=\int_B p(\theta,x)\mu(\mathrm{d}x), \tag{1.1}$$

这里 $\mu(\cdot)$ 是 $\mathscr{B}_x$上某个 σ 有限的测度，B 是 $\mathscr{B}_x$中任意元，则

$$Q(B|x)=\int_B p_\xi(\theta|x)\xi(\mathrm{d}\theta)$$

是先验分布为 ξ，$X=x$ 下的后验分布，其中

$$p_\xi(\theta|x)=\frac{p(\theta,x)}{\int_\Theta p(u,x)\xi(\mathrm{d}u)}. \tag{1.2}$$

证明 易知 $Q(B|x)$是 x 的 $\mathscr{B}_x$可测函数，又是 B 的概率测度.

$$\begin{aligned}
\bar{p}(\tilde{\theta}\in B,X\in A)&=\int_B P_\theta(X\in A)\xi(\mathrm{d}\theta)\\
&=\int_B\left[\int_A p(\theta,x)\mu(\mathrm{d}x)\right]\xi(\mathrm{d}\theta)\\
&=\int_A\left[\int_B p(\theta,x)\xi(\mathrm{d}\theta)\right]\mu(\mathrm{d}x)\\
&=\int_A\int_B p_\xi(\theta|x)\xi(\mathrm{d}\theta)\cdot\left[\int_\Theta p(u,x)\xi(\mathrm{d}u)\right]\mu(\mathrm{d}x)\\
&=\int_A Q(B|x)\int_\Theta p(u,x)\xi(\mathrm{d}u)\mu(\mathrm{d}x).
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
\bar{p}(\tilde{X}\in C)&=\int_\Theta\int_C p(\theta,x)\mu(\mathrm{d}x)\xi(\mathrm{d}\theta)\\
&=\int_C\left[\int_\Theta p(\theta,x)\xi(\mathrm{d}\theta)\right]\mu(\mathrm{d}x),
\end{aligned}$$

故

$$\bar{p}(\tilde{\theta}\in B,X\in A)=\int_{(\tilde{X}\in A)}Q(B|\tilde{X})\mathrm{d}\bar{p}.$$

这表明

$$\bar{p}(\tilde{\theta}\in B|\tilde{X})=Q(B|\tilde{X})\ \text{(a.s.)}.$$

即 $Q(B|x)$ 是后验分布. 证毕.

从定理 1.3 知，(1.2)是后验分布的分布密度。这就是计算后验分布密度的著名的贝叶斯公式。

有了后验分布，可将判决法则 δ 的风险(平均损失)$R_\xi(\delta)$ (见(1.1))改写为更有用的形式：

$$p_\xi(A)=\int_\Theta P_\theta(X\in A)\xi(\mathrm{d}\theta).$$

用 $p_\xi(\cdot)$表示先验分布为 ξ 时，随机元X的概率分布，于是

$$\begin{aligned}R_\xi(\delta)&=\int_{\Theta\times\mathscr{X}}L(\theta,\delta(x))\mathrm{d}\bar{p}_\xi\\&=\int_{\mathscr{X}}\left[\int_\Theta L(\theta,\delta(x))\xi(\mathrm{d}\theta|x)\right]p_\xi(\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

令

$$R_\xi(\delta,x)=\int_\Theta L(\theta,\delta(x))\xi(\mathrm{d}\theta|x),$$

它叫做观察到 x 时，δ 的后验风险。很明显，若存在判决法则 $\delta^*(\cdot)$满足：对一切 x，

$$R_\xi(\delta^*,x)=\inf_\delta R_\xi(\delta,x),$$

则

$$R_\xi(\delta^*)=\inf_\delta R_\xi(\delta),$$

即 δ^*是贝叶斯法则。

下面正是利用这一点来寻找贝叶斯法则。为此，先来证明关于可测选择的重要定理，这个定理在许多理论研究中都会用到。

定理1.4 设$(X,\mathscr{B}_X)$是可测空间，$(Y,\mathscr{B}_Y)$是可分完全距离可测空间($\mathscr{B}_Y$由Y中全体 Borel 集组成)，$P(Y)$是Y的全体子集组成的集合系。设F是X到$P(Y)$的映射，满足：

(1) 对任何 $x\in X$，$F(x)$是Y中非空闭集；

(2) 对Y中任何开集G，

$$\{x:\ F(x)\cap G\neq\varnothing\}\in\mathscr{B}_X,$$

则存在 $(X,\mathscr{B}_X)$ 到 $(Y,\mathscr{B}_Y)$ 的可测映射 $f(\cdot)$，使得

$$f(x)\in F(x)\ (一切\ x\in X)。$$

证明 不妨设 Y 中两点间的距离 $\rho(y_1,y_2)$ 永远小于 1．记 $H=\{r_1,r_2,\cdots\}$ 为 Y 中至多可数稠密子集．作 X 到 H 的映射 $f_n(n\geqslant 0)$，满足：

1) f_n 是 $\mathscr{B}_X$ 可测的 $(n\geqslant 0)$；

2) $\rho(f_n(x),F(x))<\dfrac{1}{2^n}$ $(n\geqslant 0)$；

3) $\rho(f_n(x),f_{n-1}(x))<\dfrac{1}{2^{n-1}}$ $(n\geqslant 1)$。

我们可用归纳法作到这一点。实际上，取 $f_0\equiv r_1$，设 f_{n-1} 已有定义且符合 1),2),3)的要求。下面来造 f_n。令

$$C_i^n=\left\{x:\ \rho(r_i,F(x))<\frac{1}{2^n}\right\},$$

$$D_i^n=\left\{x:\ \rho(x_i,f_{n-1}(x))<\frac{1}{2^{n-1}}\right\},$$

$$A_i^n=C_i^n\cap D_i^n。$$

易知 $X=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i^n$，当 $x\in A_1^n$ 时，令 $f_n(x)=r_1$；当 $x\in A_i^n-(A_1^n\cup\cdots\cup A_{i-1}^n)$ $(i>1)$ 时，令 $f_n(x)=r_i$。这 f_n 是 X 到 H 的映射。我们首先指出，f_n 是 $\mathscr{B}_X$ 可测的。为了看出这一点，令

$$B_i^n=\left\{y:\ \rho(y,r_i)<\frac{1}{2^n}\right\}。$$

则

$$C_i^n=\{x:\ F(x)\cap B_i^n\neq\varnothing\}\in\mathscr{B}_X,$$

又根据 f_{n-1} 的性质知 $D_i^n=f_{n-1}^{-1}(B_i^{n-1})\in\mathscr{B}_X$，于是

$$A_i^n=C_i^n\cap D_i^n\in\mathscr{B}_X,$$

从而 f_n 是 $\mathscr{B}_X$ 可测的。由于 $x\in A_i^n$ 时，

$$\rho(r_i, F(x)) < \frac{1}{2^n},$$

故
$$\rho(f_n(x), F(x)) < \frac{1}{2^n}.$$

由于 $x \in A_i^n$ 时，

$$\rho(f_{n-1}(x), r_i) < \frac{1}{2^{n-1}},$$

故
$$\rho(f_{n-1}(x), f_n(x)) < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

可见所造出的 f_n 符合要求。依归纳法原理，对一切 $n \geqslant 0$，f_n 都有了定义。由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(f_{n-1}(x), f_n(x)) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < \infty,$$

依空间的完全性，知 $f_n(x)$ 一致收敛到某个函数 $f(x)$。当然 $f(x)$ 是 $\mathscr{B}_X$ 可测的。由于

$$\rho(F(x), f_n(x)) < \frac{1}{2^n},$$

故
$$\rho(F(x), f(x)) = 0.$$

由于 $F(x)$ 是闭集，故 $f(x) \in F(x)$。证毕。

定理1.5 设 $(X, \mathscr{B}_X)$ 是可测空间，$(Y, \mathscr{B}_Y)$ 是可分完全距离可测空间（$\mathscr{B}_Y$ 由全体 Borel 集组成）。$\{f_n, n \geqslant 1\}$ 是 $(X, \mathscr{B}_X)$ 到 $(Y, \mathscr{B}_Y)$ 的一族可测映射，满足：对任何 x，集合 $\{f_n(x): n \geqslant 1\}$ 包含在 Y 中某紧集内。则存在可测映射 $f(x)$，使得对任何 x，有 $n_i = n_i(x)$ $(i \geqslant 1)$ 适合：

$$f(x) = \lim_i f_{n_i}(x).$$

证明 设集合 $\{f_i(x): i \geqslant n\}$ 在 Y 中的闭包为 $C_n(x)$。

$F(x)\triangleq\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n(x)$，当然 $F(x)$ 是非空紧集。任给定开集 G，有闭集列 $F_1,F_2,\cdots$，使得 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$；于是

$$\{x:\ F(x)\cap G\neq\varnothing\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:\ F(x)\cap F_n\neq\varnothing\}$$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\{x:\ C_m(x)\cap F_n\neq\varnothing\}.$$

用 ρ 表示 Y 中的距离，易知

$$\{x:\ C_m(x)\cap F_n\neq\varnothing\}=\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty}\left\{x:\ \rho(f_k(x),F_n)<\frac{1}{l}\right\}$$

$$\in\mathscr{B}_X.$$

故
$$\{x:\ F(x)\cap G\neq\varnothing\}\in\mathscr{B}_X.$$

这表明 $F(x)$ 满足定理1.4的条件，故有可测映射 $f(\cdot)$，满足：$f(x)\in F(x)$（一切 x）。

任意固定 x，由于 $f(x)\in C_k(x)$（一切 $k\geqslant 1$），故有 $n_1<n_2<\cdots$，使得

$$\rho(f_{n_k}(x),f(x))<\frac{1}{k},$$

即有 $\lim\limits_{k}f_{n_k}(x)=f(x)$。证毕。

定理1.5 设 $(X,\mathscr{B}_X)$ 是 Borel 空间，$(Y,\mathscr{B}_Y)$ 是紧距离可测空间。$f(x,y)$ 是 $(X\times Y,\mathscr{B}_X\otimes\mathscr{B}_Y)$ 上的可测函数，对 y 下半连续，则存在 X 到 Y 的可测映射 φ 满足：

$$f(x,\varphi(x))=\inf_{y}f(x,y).$$

证明 令 $\psi(x)=\inf f(x,y)$。我们指出 $\psi(x)$ 是 $\mathscr{B}_X$ 可测的。实际上，记 $B=\{(x,y):\ f(x,y)\leqslant C\}$，则 B 是 $X\times Y$ 中的 Borel 集，且

$$B^x \triangleq \{y: f(x,y) \leqslant C\}$$

是Y中的闭集，从而B^x是紧集，根据描述集合论中的单值化定理(参看 Kuratowski and Mostowski(1976)第471页)，知$\mathrm{proj}_X(E)$是X中的 Borel 集，而

$$\{x: \psi(x) < C\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{proj}_X\left\{(x,y): f(x,y) \leqslant C - \frac{1}{n}\right\} \in \mathscr{B}_X,$$

所以$\psi(x)$是可测的。

设空间Y中的距离是ρ，令

$$f_n(x,y) = \inf_{u \in Y} \{f(x,u) + n\rho(u,y)\}.$$

不难证明$f_n(x,y)$对y连续，$\lim\limits_n f_n(x,y) = f(x,y)$。根据前面的讨论知$f_n(x,y)$是$x$的$\mathscr{B}_X$可测函数。令

$$g_n(x) = \inf_{y \in Y} f_n(x,y), \qquad g(x) = \sup_{n \geqslant 1} g_n(x).$$

设$\{y_0, y_1, y_2, \cdots\}$是$Y$中（至多）可数的稠密子集。令

$$\Delta_0^n = \{x: g_n(x) = \infty\},$$

$$\Delta_i^n = \left\{x: f_n(x,y_i) \leqslant g_n(x) + \frac{1}{n}\right\} \quad (i \geqslant 1).$$

定义φ_n如下：当$x \in \Delta_0^n$时，$\varphi_n(x) \triangleq y_0$；当$x \in \Delta_i^n - (\Delta_0^n \cup \cdots \cup \Delta_{i-1}^n)$ $(i \geqslant 1)$时，$\varphi_n(x) \triangleq y_i$。易知$\varphi_n(x)$是$\mathscr{B}_X$可测的且

$$f_n(x, \varphi_n(x)) \leqslant g_n(x) + \frac{1}{n}.$$

因为$\{\varphi_n(x): n \geqslant 1\} \subset Y$而$Y$是紧空间，利用定理1.5有可测映射$\varphi(x)$满足：对任何$x$，有$n_i = n_i(x)$ $(i \geqslant 1)$，使得

$$\varphi(x) = \lim_i \varphi_{n_i}(x).$$

任给定l，只要$n_i \geqslant l$必有

$$f_l(x, \varphi_{n_i}(x)) \leqslant f_{n_i}(x, \varphi_{n_i}(x))$$

$$\leqslant g_{n_i}(x) + \frac{1}{n_i} \leqslant g(x) + \frac{1}{n_i}.$$

令 $i\to\infty$，得

$$f_l(x,\varphi(x))\leqslant g(x).$$

从而 $f(x,\varphi(x))\leqslant g(x)$。另一方面，

$$f(x,y)\geqslant f_n(x,y)\geqslant g_n(x),$$

故 $f(x,y)\geqslant g(x)$。于是

$$f(x,\varphi(x))=\inf_y f(x,y).$$

证毕。

注：在定理1.6的叙述中，若进一步假定 $f(x,y)$ 对 y 连续，则证明过程中不必引用描述集合论中的单值化定理，因为此时 $\psi(x)\triangleq\inf\limits_y f(x,y)$ 显然是可测的。顺便说一句，描述集合论中单值化定理的证明是相当复杂的。

定理1.7（见陈家鼎(1983)） 假定：

① $(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}})$ 是任意可测空间；

② $(\Theta,\mathscr{B}_\Theta)$ 是 Borel 空间；

③ $(\Omega,\mathscr{F},P_\theta)$ $(\theta\in\Theta)$ 是概率空间，当 $A\in\mathscr{F}$ 时，$P_\theta(A)$ 是 θ 的 $\mathscr{B}_\Theta$ 可测函数；

④ A 是局部紧可数基 T_2 型空间 E 的非空 Borel 子集，$\mathscr{B}_A$ 由 A 的全体 Borel 子集组成；

⑤ $L(\theta,a)$ 是 $\mathscr{B}_\Theta\otimes\mathscr{B}_A$ 可测的非负函数，对 a 下半连续，而且对任何 $a^*\in A^*-A$，有

$$\lim_{a\to a^*}L(\theta,a)=\infty\quad(\theta\in\Theta),$$

这里 A^* 是 A 在 E 的单点紧化空间中的闭包；

⑥ $\xi(\cdot)$ 是 $(\Theta,\mathscr{B}_\Theta)$ 上的概率测度；

⑦ $X(\omega)$ 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 到 $(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}})$ 的可测映射，则存在判决法则 $\delta^*(\cdot)$（即 $(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}})$ 到 $(A,\mathscr{B}_A)$ 的可测映射），满足：

$$R_\xi(\delta^*)=\inf_\delta R_\xi(\delta),$$

这里 $R_\xi(\delta)$ 由(1.1)所定义，即

$$R_\xi(\delta)=\int_\Theta\int_\Omega L(\theta,\delta(X(\omega)))P_\theta(\mathrm{d}\omega)\xi(\mathrm{d}\theta).$$

证明 由于 $(\Theta,\mathscr{B}_\theta)$ 是Borel空间，对于先验分布ξ，在$X(\omega)=x$的条件下有后验分布$\xi(\cdot|x)$。后验风险是

$$K(x,a)\triangleq\int_\Theta L(\theta,a)\xi(\mathrm{d}\theta|x).$$

$$\bar{K}(x,a)\triangleq\int_\Theta \bar{L}(\theta,a)\xi(\mathrm{d}\theta|x),$$

其中

$$\bar{L}(\theta,a)=\begin{cases}L(\theta,a), & a\in A,\\ \infty, & a\in A^*-A.\end{cases}$$

易知$\bar{K}(x,a)$是二元Borel可测且对a下半连续。从定理1.6知有$(X,\mathscr{B}_X)$到$(A,\mathscr{B}_A)$的可测映射$\varphi(x)$满足

$$\bar{K}(x,\varphi(x))=\inf_a \bar{K}(x,a).$$

任意固定$a_0\in A$。令

$$\delta^*(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{当}\inf\limits_a \bar{K}(x,a)<\infty,\\ a_0, & \text{当}\inf\limits_a \bar{K}(x,a)=\infty.\end{cases}\quad(a\in A)$$

从定理1.6的证明过程中知道，$\inf\limits_a \bar{K}(x,a)$是$x$的可测函数，故$\delta^*(\cdot)$是可测映射。由于$\bar{K}(x,\cdot)$在$A^*-A$上为$\infty$，故$\delta^*(x)\in A$（一切$x$）。显然

$$K(x,\delta^*(x))=\inf_a K(x,a).$$

但对任何判决法则δ均有

$$R_\xi(\delta)=\int_{\mathscr{X}}\int_\Theta L(\theta,\delta(x))\xi(\mathrm{d}\theta|x)\mu(\mathrm{d}x)$$

$$=\int_{\mathscr{X}}K(x,\delta(x))\mu(\mathrm{d}x),$$

这里$\mu(A)=\int_{\Theta}P_\theta(X\in A)\xi(\mathrm{d}\theta)$，即随机元$X$的绝对分布。于是

$$R_\xi(\delta)\geqslant\int_{\mathscr{X}}K(x,\delta^*(x))\mu(\mathrm{d}x)=R_\xi(\delta^*)。$$

这表明δ^*是贝叶斯法则。证毕。

我们顺便指出，如果损失函数$L(\theta,a)$对a连续，则贝叶斯法则的存在性的证明过程中无须用到集合的单值化定理。但连续性是一种限制颇强的要求，在假设检验和区间估计的问题中时常碰到不连续的损失函数，例如$\Theta=A=(-\infty,\infty)$，下列损失函数：

$$L(\theta,a)=\begin{cases}0, & \text{当}|\theta-a|\leqslant d,\\ 1, & \text{当}|\theta-a|>d\end{cases}$$

就不是a的连续函数。

§2 贝叶斯序贯判决的存在性

沿用§1中的记号$(\Theta,\mathscr{B}_\Theta)$，$(A,\mathscr{B}_A)$，$(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}})$，$(\Omega,\mathscr{F},P_\theta)$及$L(\theta,a)$。

设$X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega),\cdots$是$(\Omega,\mathscr{F})$到$(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}})$(观察空间)的可测映射列.费用函数$C_n(x_1,\cdots,x_n)(n\geqslant1)$是$(\mathscr{X}^n,\mathscr{B}_{\mathscr{X}}^n)$上非负实值可测的，以下规定

$$C_0\equiv0,\ C_\infty(x_1,x_2,\cdots)\equiv\infty。$$

费用函数$C_n(x_1,\cdots,x_n)$的含义是：当观察值是$X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n$时所花的费用。

记$\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$，$\mathscr{F}_n=\sigma(X_1,\cdots,X_n)$是由$X_1,\cdots,X_n$产生的$\sigma$代数，$\mathscr{F}_\infty=\sigma\{X_1,X_2,\cdots\}$。和通常一样，我们称$(\Omega,\mathscr{F})$上非负整值(包括$\infty$)的可测函数$\tau$为停止法则(停时)，如果对一切$n\geqslant0$，有$\{\tau=n\}\in\mathscr{F}_n$。

记

$$\mathscr{X}^{\infty}=\mathscr{X}\times\mathscr{X}\times\cdots,\quad \mathscr{B}_{\mathscr{X}}^{\infty}=\mathscr{B}_{\mathscr{X}}\otimes\mathscr{B}_{\mathscr{X}}\otimes\cdots\cdots,$$

$$\mathscr{X}^{0}=\{a\}(\text{一个符号组成}),\quad \mathscr{B}_{\mathscr{X}}^{0}=\{\mathscr{X}^{0}\text{的所有子集}\},$$

a可理解为"不进行观测"．称 $\bigcup\limits_{0\leqslant n\leqslant\infty}\mathscr{X}^{n}$ 到A的映射$d(\cdot)$为判决法则，若对一切$n(0\leqslant n\leqslant\infty)$，$d(\cdot)$限制在$\mathscr{X}^{n}$上是$(\mathscr{X}^{n},\mathscr{B}_{\mathscr{X}}^{n})$到$(A,\mathscr{B}_{A})$之可测映射．偶 $\delta=(\tau,d)$叫做序贯判决法则．以下记：

$$P_{\xi}(A)=\int_{\Theta}P_{\theta}(A)\xi(\mathrm{d}\theta).$$

若$P_{\xi}(\tau<\infty)=1$，则称τ是有限的．

给定先验分布ξ和序贯判决法则$\delta=(\tau,d)$，可令

$$R_{\xi}(\delta)=\int_{\Theta}\int_{\Omega}[L(\theta,d(X_{1},\cdots,X_{\tau}))+C_{\tau}(X_{1},\cdots,X_{\tau})]$$

$$\cdot P_{\theta}(\mathrm{d}\omega)\xi(\mathrm{d}\theta),\tag{2.1}$$

其中$(x_{1},x_{2},\cdots,x_{\infty})$理解为$(x_{1},x_{2},\cdots)$．

定理2.1 在定理1.7的条件①—⑤下，如果$X_1,X_2,\cdots$是$(\Omega,\mathscr{F})$到$(\mathscr{X},\mathscr{B}_{\mathscr{X}})$之可测映射列，并且

$$\lim_{n\to\infty}C_{n}(x_{1},\cdots,x_{n})=\infty(\text{一切}x_{i}\in\mathscr{X},i\geqslant1),$$

则对任何先验分布ξ，存在贝叶斯序贯判决法则，即存在$\delta^{*}=(\tau^{*},d^{*})$，$\tau^{*}$是有限的，对任何序贯判决法则$\delta=(\tau,d)$皆成立：

$$R_{\xi}(\delta^{*})\leqslant R_{\xi}(\delta).\tag{2.2}$$

证明 对于先验分布ξ，用$\xi(\cdot|x_{1},\cdots,x_{n})$（或$\xi(x_{1},\cdots,x_{n})$）记观察$X_{1}=x_{1},\cdots,X_{n}=x_{n}$下的后验分布（当$B\in\mathscr{B}_{\Theta}^{n}$时，$\xi(B|x_{1},\cdots,x_{n})$是$\mathscr{B}_{\mathscr{X}}^{n}$可测的）．若$\eta$是$(\Theta,\mathscr{B}_{\Theta})$上之概率测度，令

$$\rho_{0}(\eta)=\inf_{t\in D}\int_{\Theta}L(\theta,t)\eta(\mathrm{d}\theta),\tag{2.3}$$

$$K(x_{1},\cdots,x_{n};a)=\int_{\Theta}L(\theta,a)\xi(\mathrm{d}\theta|x_{1},\cdots,x_{n}).$$

从定理1.7的证明过程知道，存在$(\mathscr{X}^n,\mathscr{B}^n_{\mathscr{X}})$到$(A,\mathscr{B}_A)$的可测映射$d_n^*(x_1,\cdots,x_n)(1\leqslant n\leqslant\infty)$，使得

$$\rho_0(\xi(x_1,\cdots,x_n))=\int_{\Theta}L(\theta,d_n^*(x_1,\cdots,x_n))\xi(d\theta|x_1,\cdots,x_n)$$

而且$\rho_0(\xi(x_1,\cdots,x_n))$是$x_1,\cdots,x_n$之可测函数，从而知$\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_n))$是$\mathscr{F}_n$可测的。同理有$d_0^*$使得：

$$\rho_0(\xi)=\int_{\Theta}L(\theta,d_0^*)\xi(d\theta).$$

在$\bigcup_{0\leqslant n\leqslant\infty}\mathscr{X}^n$中定义$d^*$如下：在$\mathscr{X}^n$上等于$d_n^*(0\leqslant n\leqslant\infty)$。对任何序贯法则$\delta=(\tau,d)$，令$\hat{\delta}=(\tau,d^*)$，易知

$$R_\xi(\hat{\delta})\leqslant R_\xi(\delta).$$

以下不妨设τ是有限的（否则的话$R_\xi(\delta)=\infty$，(2.2)式自然成立），研究$R_\xi(\hat{\delta})$的表达式，分两种情况。

① $\{\tau=0\}=\Omega$，此时

$$R_\xi(\hat{\delta})=\int_{\Theta}\int_{\Omega}L(\theta,d_0^*)P_\theta(d\omega)\xi(d\theta)=\rho_0(\xi).$$

② $\{\tau=0\}=\varnothing$，此时

$$\begin{aligned}R_\xi(\hat{\delta})&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Theta}\left\{\int_{\{\tau=n\}}[L(\theta,d^*(X_1,\cdots,X_n))\right.\\&\quad\left.+C_n(X_1,\cdots,X_n)]P_\theta(d\omega)\right\}\xi(d\theta)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\{\tau=n\}}[\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_n))+C_n(X_1,\cdots,X_n)]P_\xi(d\omega)\\&=\int_{\Omega}\{\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_\tau))+C_\tau(X_1,\cdots,X_\tau)\}P_\xi(d\omega).\end{aligned}$$

令$z_0=\rho_0(\xi)$，

$$z_n = \rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_n)) + C_n(X_1,\cdots,X_n)\ (n\geqslant 1),$$

总之有 $R_\xi(\hat{\delta}) = \int_\Omega z_\tau \mathrm{d}P_\xi$。令 $y_n = -z_n$，则 $y_n \leqslant 0, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$。依最优停止理论（见本书第一章）知，存在有限停时$\tau^*$，使得

$$\int_\Omega y_{\tau^*}\mathrm{d}P_\xi = \sup_{\tau\text{停时}}\int_\Omega y_\tau \mathrm{d}P_\xi,$$

即有$\int_\Omega z_{\tau^*}\mathrm{d}P_\xi \leqslant \int_\Omega z_\tau \mathrm{d}P_\xi$（一切停时$\tau$）。取$\delta^* = (\tau^*, d^*)$，则

$$R_\xi(\delta^*) \leqslant R_\xi(\hat{\delta}) \leqslant R_\xi(\delta).$$

这表明δ^*是贝叶斯序贯判决法则。证毕。

顺便指出，在定理 2.1 中没有要求观察序列$\{X_n, n\geqslant 1\}$是相互独立同分布的，也没有要求

$$\lim_{n\to\infty}\ \inf_{x_1,\cdots,x_n} C_n(x_1,\cdots,x_n) = \infty,$$

因而适用范围很广。贝叶斯序贯判决法则的停时通称贝叶斯停时。

定义2.1 称序贯判决法则 $\delta = (\tau, \mathrm{d})$是截断型的（或截尾型的），若$\tau$是有界停时，即存在正整数$m$满足 $P_\xi(\tau\leqslant m) = 1$。

在实用上特别关心：何时存在截断型的贝叶斯序贯判决法则？我们有下列一般性结论：

定理2.2 在定理1.7的条件①—⑤下，如果费用函数满足：

$$C_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) \leqslant C_{n+1}(x_1,\cdots,x_{n+1})\ (n\geqslant 1),$$

$$\lim_{n\to\infty} C_n(x_1,\cdots,x_n) = \infty,$$

又若对给定的先验分布ξ，存在正整数m满足：

i) $E_\xi\{\sup\limits_{n\geqslant m} \rho_0[\xi(X_1,\cdots,X_n)]\} < \infty$；

ii) 对一切$n\geqslant m$，关于P_ξ a.s.成立：

$$\begin{aligned}\rho_0[\xi(X_1,\cdots,X_n)] &+ C_n(X_1,\cdots,X_n)\\ &\leqslant E_\xi\{[\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_{n+1}))\\ &\quad + C_{n+1}(X_1,\cdots,X_{n+1})] \mid \mathscr{F}_n\}\end{aligned}$$

（这里 E_ξ 是关于P_ξ的期望符号，$\mathscr{F}_n = \sigma(X_1,\cdots,X_n)$，$\rho_0$的含义见(2.3))，则存在贝叶斯序贯判决法则 $\delta^* = (\tau^*, d^*)$满足：

$P_\xi(\tau^*\leqslant m)=1$。

证明 沿用定理 2.1 证明过程中的记号，对任何序贯判决法则$\delta=(\tau,d)$，仍记$\hat{\delta}=(\tau,d^*)$。已知$R_\xi(\hat{\delta})\leqslant R_\xi(\delta)$且$R_\xi(\hat{\delta})=E_\xi z_\tau$。令$\tau_1=\min(\tau,m)$，我们首先指出：

$$E_\xi z_{\tau_1}\leqslant E_\xi z_\tau. \tag{2.4}$$

实际上，若$E_\xi z_\tau=\infty$，当然(2.4)成立。设$E_\xi z_\tau<\infty$，则

$$E_\xi[\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_\tau))]<\infty,$$

$$E_\xi C_\tau(X_1,\cdots,X_\tau)<\infty,$$

从而$P_\xi(\tau<\infty)=1$。利用定理的条件 ii)知

$$\begin{aligned}
\int_{\{\tau>m\}} z_m \mathrm{d}P_\xi &\leqslant \int_{\{\tau>m\}} z_{m+1}\mathrm{d}P_\xi \\
&= \int_{\{\tau=m+1\}} z_\tau \mathrm{d}P_\xi + \int_{\{\tau>m+1\}} z_{m+1}\mathrm{d}P_\xi \\
&\leqslant \int_{\{\tau=m+1\}} z_\tau \mathrm{d}P_\xi + \int_{\{\tau>m+1\}} z_{m+2}\mathrm{d}P_\xi \leqslant\cdots \\
&\leqslant \int_{\{m<\tau\leqslant N\}} z_\tau \mathrm{d}P_\xi + \int_{\{\tau>N\}} z_N \mathrm{d}P_\xi,
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\int_{\{\tau>m\}} z_m \mathrm{d}P_\xi \leqslant & \int_{\{m<\tau\leqslant N\}} z_\tau \mathrm{d}P_\xi \\
& + \int_{\{\tau>N\}} [\sup_{k>m} \rho_0[\xi(X_1,\cdots,X_k)] \\
& + C_\tau(X_1,\cdots,X_\tau)]\mathrm{d}P_\xi.
\end{aligned}$$

令$N\to\infty$知

$$\int_{\{\tau>m\}} z_m \mathrm{d}P_\xi \leqslant \int_{\{\tau>m\}} z_\tau \mathrm{d}P_\xi,$$

故

$$E_\xi z_{\tau_1} = \int_{\{\tau\le m\}} z_\tau \mathrm{d}P_\xi + \int_{\{\tau>m\}} z_m \mathrm{d}P_\xi$$

$$\le \int_{\{\tau\le m\}} z_\tau \mathrm{d}P_\xi + \int_{\{\tau>m\}} z_\tau \mathrm{d}P_\xi = E_\xi z_\tau.$$

这就证明了(2.4)式。

令$y_n = -z_n(n\geqslant 0)$，因为$y_n\leqslant 0$，利用最优停止理论(见本书第一章)有停时$\tau^*\leqslant m$，满足

$$E_\xi y_{\tau^*} = \sup\{E_\xi y_\tau:\ \tau\text{是停时且}0\leqslant\tau\leqslant m\}.$$

再利用(2.4)知$E_\xi z_{\tau^*}\leqslant E_\xi z_\tau$。令$\delta^* = (\tau^*,d^*)$，于是

$$R_\xi(\delta^*) = E_\xi z_{\tau^*}\leqslant R_\xi(\delta).$$

可见δ^*是贝叶斯序贯判决法则。证毕。

在实用上，一般取$C_n(x_1,\cdots,x_n) = nC$，这里C是正常数，这时定理2.2的条件ii)即为：$n\geqslant m$时，

$\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_n)) - E_\xi\{\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_{n+1}))|\mathscr{F}_n\}\leqslant C$ (a.s.)。特别，当$\lim\limits_n \sup\limits_{X_1,\cdots,X_n} \rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_n)) = 0$(a.s.)时，一定存在截断型的贝叶斯序贯判决法则。

系2.1 若$C_n(X_1,\cdots,X_n) = n\cdot C$，$\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_n)) = a_n$ (a.s.)，这里a_n是常数($n\geqslant 0$)，取n_0适合

$$n_0C - a_{n_0} = \inf_n\{n\cdot C + a_n\}, \tag{2.5}$$

则贝叶斯序贯判决法则只作n_0次观测。

证明 因为$\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_n)) + nC = a_n + nC$，即有

$$z_n \equiv a_n + nC\geqslant a_{n_0} + n_0C = z_{n_0},$$

故$z_\tau\geqslant z_{n_0}$，可见$\tau^*\equiv n_0$是最优的，即贝叶斯序贯判决法则只作n_0个观测。证毕。

例2.1 设$X_1,X_2,\cdots$是i.i.d随机变量列，$X_1\sim N(\theta,1)$，$\theta\in(-\infty,\infty)$，$A = (-\infty,\infty)$，$L(\theta,a) = w(|\theta - a|)$，这里$w(t)$是非负的增函数($t\geqslant 0$)，$C_n(x_1,\cdots,x_n) = nC(n\geqslant 1)$。设$\theta$的先验分

布是$N(0,\sigma^2)$，有了样本$X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n$后，θ 之后验分布为$N\left(\frac{n\sigma^2\bar{x}}{1+n\sigma^2},\frac{\sigma^2}{1+n\sigma^2}\right)$，经过计算知最小后验风险(不计 费 用)为：

$$\rho_0(\xi(x_1,\cdots,x_n))=\inf_a\frac{1}{\sqrt{2\pi B}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(\theta-C)^2}{2B^2}}w(|\theta-a|)d\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi B}}\inf_a\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\theta^2}{2B}}w(|\theta+C-a|)d\theta,$$

这里$C=n\sigma^2\bar{x}/1+n\sigma^2$，$B=\frac{\sigma^2}{1+n\sigma^2}$。易知下确界当$a=c$时达到，而且

$$\rho_0(\xi(x_1,\cdots,x_n))=\frac{1}{\sqrt{2\pi B}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\theta^2/2B^2}w(|\theta|)d\theta,$$

此式右端与$x_1,\cdots,x_n$ 无 关。从系2.1知此时贝叶斯序贯判决法则的样本量是固定常 数n_0，其值由 公 式(2.5)来 确 定。当然，函数$w(t)$当 t 增大时增长得不能太快，应有$l>0$使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-l\theta^2}w(|\theta|)d\theta<\infty.$$

下面是两个特例：

$$(一)\qquad w(t)=\begin{cases}1, & 当|t|\geqslant\frac{l}{2},\\ 0, & 当|t|<\frac{l}{2},\end{cases}$$

这里 l 是已知的正数。不难算出

$$\rho_0(\xi(x_1,\cdots,x_n))=2\Phi(-l\sqrt{1+n\sigma^2}/2\sigma),$$

这里 $\Phi(x)$是标准正态分布。查正态分布表，即可决定最优的样本量n_0，而判决法则d^*应取为：

$$d^*=\sigma^2\sum_1^{n_0}X_i/1+n_0\sigma^2.$$

这个特例实际是一个区间估计问题，我们用一个长为 l 的区间去估计 θ，若区间含真参数值 θ，则损失为 0，否则为 1．根据上述，区间中点应取为

$$C=\sigma^2\sum_1^{n_1}X_i/1+n_0\sigma^2$$

（二）　　　　$w(t)=t^2$．

此时，

$$\rho_0(\xi(x_1,\cdots,x_n))=\sigma^2/1-n\sigma^2．$$

最优样本量 n_0 由下式确定：

$$C\cdot n_0+\frac{\sigma^2}{1+n_0\sigma^2}=\inf_n\left(Cn+\frac{\sigma^2}{1+n\sigma^2}\right),$$

θ 则用 $\overline{X}_{n_0}\cdot\dfrac{n_0\sigma^2}{1+n_0\sigma^2}$ 作为估计值．

例2.2　我们来研究贝努里分布的参数的序贯估计．设 $\Theta=(0,1)$，$\mathscr{B}_\theta$ 是由 Θ 的一切Borel集组成．$A=[0,1]$，$\mathscr{B}_A$ 由 A 的一切Borel集组成．$\mathscr{X}=\{0,1\}$，$\mathscr{B}_\mathscr{X}$ 由 $\mathscr{X}$ 之一切子集组成．X_1、X_2、$\cdots$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P_\theta)$ 上取值于 $\mathscr{X}$ 的 i.i.d 序列，且

$$P_\theta(X_i=1)=\theta=1-P_\theta(X_i=0),$$

单次观察的费用是 $C>0$（即有 $C_n(x_1,\cdots,x_n)=n\cdot C$）．

设先验分布 ξ 为 $(0,1)$ 上均匀分布，损失函数是 $L(\theta,a)=(\theta-a)^2$，此时，在观察 $X_1,\cdots,X_j$ 后，θ 之后验分布为 $\beta(S_j+1,j-S_j+1)$，这里 $S_j=X_1+\cdots+X_j$，易知使后验风险最小的判决为 $d=\dfrac{S_j+1}{j+2}$．

$$\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_n))=\frac{(j+1)!}{S_j!(j-S_j)!}\cdot\int_0\left(\frac{S_j+1}{j+2}-\theta\right)^2\theta^{S_j}(1-\theta)^{j-S_j}d\theta$$

$$=\left(\frac{S_j+1}{j+2}\right)^2-2\left(\frac{S_j+1}{j+2}\right)^2$$

$$+\frac{(S_j+1)(S_j+2)}{(j+2)(j+3)}$$

$$=\frac{(S_j+1)(j-S_j+1)}{(j+2)^2(j+3)}$$

$$=\frac{(S_j+1)[j+2-(S_j+1)]}{(j+2)^2(j+3)}$$

$$\leqslant\frac{\left(\frac{j+2}{2}\right)^2}{(j+2)^2(j+3)}=\frac{1}{4(j+3)},$$

故

$$\lim_{j}\sup_{X_1,\cdots,X_j}\rho(\xi(X_1,\cdots,X_j))=0,$$

于是贝叶斯法则是截断型的。

在这个例子，若把损失函数改为$L(\theta,a)=\frac{(\theta-a)^2}{\theta(1-\theta)}$，其它条件不变，则在观察 $X_1,\cdots,X_j$后，使后验风险(不计抽样费用)最小的判决为

$$d=\frac{S_j}{j},\quad \rho(\xi(X_1,\cdots,X_j))=\frac{1}{j}.$$

从系 2 知贝叶斯法则的停时是固定正整数 n_0，它由下式确定：

$$Cn_0+\frac{1}{n_0}=\inf_n\left(Cn+\frac{1}{n}\right).$$

易知这时$n_0=\left[\frac{1}{C}\right]$或$\left[\frac{1}{C}\right]+1$。

在上述例子里，若把损失函数改为$L(\theta,a)=\left(\frac{\theta-a}{\theta(1-\theta)}\right)^2$，其它条件不变，则可以证明贝叶斯法则的停时仍是截断型的，详细

论述见§4节.

§3 独立同分布情形下的序贯判决

本节沿用§2中的记号，但假设$X_1, X_2, \cdots$是$(\Omega, \mathscr{F}, P_\theta)(\theta\in\Theta)$上独立同分布的随机变量(观察)序列，$X_i$取值于可测空间$(\mathscr{X}, \mathscr{B})(i\geqslant 1)$，损失函数$C_n(x_1, \cdots, x_n)=nC(n\geqslant 1)$，$C$是正常数．设$\theta$之先验分布是$\xi$，我们来研究贝叶斯停时有关的公式．先讨论贝叶斯风险

$$\rho(\eta)=\inf_{\tau\geqslant 0}\int_\Theta\int_\Omega[L(\theta, d^*(X_1, \cdots, X_\tau))+\tau\cdot C]P_\theta(d\omega)\eta(d\theta).$$

仍用$\xi(x_1, \cdots, x_n)$表示参数θ的先验分布是ξ，在得到观察值$X_1=x_1, \cdots, X_n=x_n$后θ之后验分布，于是在第n次观测后停止的贝叶斯风险是$\rho_0(\xi(x_1, \cdots, x_n))$，而在第$n$次观测后继续观测下去的贝叶斯风险是$\rho(\xi(x_1, \cdots, x_n))$。显然当

$$\rho(\xi(x_1, \cdots, x_n))=\rho_0(\xi(x_1, \cdots, x_n))$$

时，没有必要进行第$n+1$次观测了，故可以设想，最优停时(即贝叶斯停时)应是

$$\tau^*=\inf\{n:\ n\geqslant 0,\ \rho(\xi(x_1, \cdots, x_n))=\rho_0(\xi(x_1, \cdots, x_n))\}.$$

这个结论的严格证明相当烦难，而且需要添加一些条件．本节的主要任务就是证明这个结论，此外还要给出贝叶斯风险$\rho(\xi(X_1, \cdots, X_n))$之逼近公式．我们首先要证明一系列引理．

引理3.1 设$X(\omega)$是$(\Omega, \mathscr{F})$到$(\mathscr{X}, \mathscr{B})$之可测映射，$f(\theta, x)$是二元非负(或有界)可测，则

$$\int_\Theta\int_\Omega f(\theta, X(\omega))P_\theta(d\omega)\xi(d\theta)$$

$$=\int_{\mathscr{X}}\int_\Theta f(\theta, x)\xi(d\theta|x)P_\xi^X(dx)$$

$$=\int_{\Omega}\int_{\Theta}f(\theta,X(\omega))\xi(\mathrm{d}\theta\,|\,X(\omega))P_{\xi}(\mathrm{d}\omega), \tag{3.1}$$

这里

$$P_{\xi}(A)=\int_{\Theta}P_{\theta}(A)\xi(\mathrm{d}\theta)(A\in\mathscr{F}),\ \ P_{\xi}^{X}(B)=P_{\xi}(X\in B).$$

证明 只须考虑 $f(\theta,x)=I_B(\theta)I_A(x)$ 的情形(一般情形可由此及典型方法推得). 此时(3.1)式的左端为

$$\int_B P_{\theta}(X\in A)\xi(\mathrm{d}\theta),$$

(3.1)之右端为

$$\int_{\{X\in A\}}\xi(B\,|\,X(\omega))P_{\xi}(\mathrm{d}\omega).$$

记 $\tilde{P}_{\xi}$ 为 $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}$ 上的概率测度，满足:

$$\tilde{P}_{\xi}(\tilde{\theta}\in B\,|\,X)=\xi(B\,|\,X)(\text{a.s.}\,\tilde{P}_{\xi}),$$

即

$$\tilde{P}_{\xi}(\tilde{\theta}\in B,X\in A)=\int_{\{X\in A\}}\xi(B\,|\,X)\mathrm{d}\tilde{P}_{\xi}.$$

但是

$$\int_B P_{\theta}(X\in A)\xi(\mathrm{d}\theta)=\int_{\Omega\times\Theta}f(\theta,X(\omega))\mathrm{d}\tilde{P}_{\xi},$$

又有

$$\int_{\{X\in A\}}\xi(B\,|\,X)\mathrm{d}\tilde{P}_{\xi}=\int_{\{X\in A\}}\xi(B\,|\,X)\mathrm{d}P_{\xi},$$

于是(3.1)成立. 证毕.

引理3.2 设 X,Y 是 $(\Omega,\mathscr{F},P_{\theta})$ 上相互独立的随机元(一切 $\theta\in\Theta$), $g(x,y)$ 是二元非负(或有界)可测, 则

$$E_{\xi}(g(X,Y)\,|\,X)=\{E_{\xi(x)}g(x,Y)\}|_{x=X}(\text{a.s.}\,P_{\xi}), \tag{3.2}$$

这里使用记号 $f(x)|_{x=t}=f(t)$.

证明 $\int\limits_{\{X\in A\}} g(X,Y)\mathrm{d}P_{\xi}$

$$=\int_{\Theta}\int_{\Omega} I_{\{X\in A\}}\, g(X,Y)P_{\theta}(\mathrm{d}\omega)\xi(\mathrm{d}\theta)$$

$$=\int_{\Theta}\int_{\Omega} E_{\theta}\{I_{\{X\in A\}}\, g(X,Y)\mid X\}P_{\theta}(\mathrm{d}\omega)\xi(\mathrm{d}\theta)$$

$$=\int_{\Theta}\left[\int_{\Omega} E_{\theta}\{I_A(x)g(x,Y)\}\right]\Big|_{x=X} P_{\theta}(\mathrm{d}\omega)\xi(\mathrm{d}\theta)$$

$$=\int_{\Omega}\int_{\Theta}[I_A(x)g(x,Y)]|_{x=X}\xi(\mathrm{d}\theta\mid X)P_{\xi}(\mathrm{d}\omega)$$

$$=\int_{\Omega} I_A(X)[E_{\xi(x)}g(x,Y)]|_{x=X}P_{\xi}(\mathrm{d}\omega)$$

$$=\int\limits_{\{X\in A\}}[E_{\xi(x)}\, g(x,Y)]|_{x=X}\mathrm{d}P_{\xi},$$

这就证明了(3.2)式成立。证毕。

我们仍假设损失函数 $L(\theta,d)$满足定理2.2中的条件。设

$$z_0=\rho_0(\xi)=\inf_{d}\int_{\Theta} L(\theta,d)\xi(\mathrm{d}\theta),$$

$$z_n=\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_n))+n\cdot C(n\geqslant 1)。$$

注意，由于 $\rho_0(\xi(x_1,\cdots,x_n))$是空间$(\mathscr{X}^n,\mathscr{B}^n)$上的可测函数(见§2)，故$z_n$是$\mathscr{F}_n$可测的。设$\{\xi_\alpha,\alpha\in\mathscr{U}\}$是$(\Omega,\mathscr{F})$上一族可测函数，第一章定义了此族的本性上确界(e.sup)，类似地也可定义本性下确界(e.inf)。实际上，可定义

$$\mathrm{e.inf}\{\xi_\alpha;\ \alpha\in\mathscr{U}\}=-\mathrm{e.sup}\{-\xi_\alpha;\ \alpha\in\mathscr{U}\}.$$

记

$$\gamma_n=\mathrm{e.inf}\{E_{\xi}\{z_\tau\mid\mathscr{F}_n\};\ \tau\geqslant n,\ \tau\text{是}\{\mathscr{F}_n\}\text{的停时}\}。$$

定理3.1 $\gamma_n=\rho(\xi(X_1,\cdots,X_n))+n\cdot C(n\geqslant 0)(\mathrm{a.s.}P_{\xi})$。

证明 任意固定 $x_1,\cdots,x_n$，从定理2.2的证明方法知，有停时τ^*(与$x_1,\cdots,x_n$有关)，满足：

$$\{\tau^*=i\}\in\sigma(X_{n+1},\cdots,X_{n+i})(i\geqslant 0),$$

$$\begin{aligned}&\rho(\xi(x_1,\cdots,x_n))\\&=E_{\xi(x_1,\cdots,x_n)}\{\rho_0(\xi(x_1,\cdots,x_n)(X_{n+1},\cdots,X_{n+\tau^*}))\\&\quad+\tau^*\cdot C\}.\end{aligned}$$

令

$$\Delta_n=\{\tau;\ \tau\geqslant n\text{且对一切}k\geqslant n,\ \{\tau=k\}\in\sigma(X_{n+1},\cdots,X_k)\},$$

则$\tau^*\in\Delta_n$，故

$$\begin{aligned}&\rho(\xi(x_1,\cdots,x_n))\\&\geqslant\inf_{\tau\in\Delta_n}E_{\xi(x_1,\cdots,x_n)}\{\rho_0(\xi(x_1,\cdots,x_n)(X_{n+1},\cdots,X_\tau))\\&\quad+\tau\cdot C\}-n\cdot C.\end{aligned}$$

对于$\tau\in\Delta_n$，从引理3.2知

$$\begin{aligned}&E_{\xi(x_1,\cdots,x_n)}\{\rho_0(\xi(x_1,\cdots,x_n)(X_{n+1},\cdots,X_\tau)\\&\qquad+\tau\cdot C\}|_{x_i=X_i,\ i=1,\cdots,n}\\&\quad=E_\xi\{\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_\tau))+\tau\cdot C|X_1,\cdots,X_n\}(\text{a.s.}P_\xi),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\rho(\xi(X_1,\cdots,X_n))&\geqslant\inf_{\tau\in\Delta_n}E_\xi(\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_\tau))\\&\qquad+\tau\cdot C|\mathscr{F}_n)-n\cdot C\\&\geqslant\gamma_n-n\cdot C(\text{a.s.}P_\xi),\end{aligned}$$

故

$$\gamma_n\leqslant\rho(\xi(X_1,\cdots,X_n))+n\cdot C(\text{a.s.}P_\xi).\tag{3.3}$$

任意固定停时$\tau\geqslant n$，则有$B_k\in\mathscr{B}^k$，使

$$I_{\{\tau=k\}}(\omega)=\psi_k(X_1,\cdots,X_k)=I_{B_k}(X_1,\cdots,X_k),$$

于是

$$E_\xi\{\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_\tau))+\tau\cdot C|X_1,\cdots,X_n\}$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty} E_{\xi}\{I_{B_k}(X_1,\cdots,X_k)$$

$$\cdot[\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_k))+k\cdot C]\mid X_1,\cdots,X_n\}$$

$$\overset{\text{引理3.2}}{=}\sum_{k=n}^{\infty} E_{\xi(x_1,\cdots,x_n)}\{I_{B_k}(x_1,\cdots,x_n,X_{n+1},\cdots,X_k)$$

$$\cdot[\rho_0(\xi(x_1,\cdots,x_n)(X_{n+1},\cdots,X_k))$$

$$+k\cdot C]\}\big|_{x_i=X_i,\ i=1,\cdots,n}$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty} E_{\xi(x_1,\cdots,x_n)}\{I_{B_{n+l}}(x_1,\cdots,x_n,X_1,\cdots,X_l)$$

$$[\rho_0(\xi(x_1,\cdots,x_n)(X_1,\cdots,X_l))+l\cdot C]\}+n\cdot C.$$

任固定$x_1,\cdots,x_n$，令

$$\tilde{B}_l=\{(u_1,\cdots,u_l):\ (x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_l)\in B_{n+l}\},$$

$$\tilde{\tau}=\inf\{l:\ (X_1,\cdots,X_l)\in\tilde{B}_l\},$$

则$\{\tilde{\tau}=l\}\subset\{(X_1,\cdots,X_l)\in\tilde{B}_l\}$，故有

$$I_{\{\tilde{\tau}=l\}}\leqslant I_{\tilde{B}_l}(X_1,\cdots,X_l)=I_{B_{n+l}}(x_1,\cdots,x_n,X_1,\cdots,X_l),$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} E_{\xi(x_1,\cdots,x_n)}\{I_{B_{n+l}}(x_1,\cdots,x_n,X_1,\cdots,X_l)$$

$$\cdot[\rho_0(\xi(x_1,\cdots,x_n)(X_1,\cdots,X_l))+l\cdot C]\}$$

$$\geqslant\sum_{l=0}^{\infty} E_{\xi(x_1,\cdots,x_n)}\{I_{\{\tilde{\tau}=l\}}$$

$$[\rho_0(\xi(x_1,\cdots,x_n)(X_1,\cdots,X_l))+l\cdot C]\}$$

$$\geqslant\rho\{\xi(x_1,\cdots,x_n)\}.$$

由此可见

$$E_{\xi}(\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_\tau))+\tau\cdot C\mid\mathscr{F}_n)$$

$$\geqslant\varphi(\xi(X_1,\cdots,X_n))+n\cdot C\ (\text{a.s.}P_{\xi}).$$

由τ的任意性知

$$\gamma_n \ge \rho(\xi(X_1,\cdots,X_n)) + u \cdot C(\text{a.s.}P_\cdot),$$

再由(3.3)式就知定理3.1成立。证毕。

定义测度

$$P_\xi^{X_1,\cdots,X_n}(B) = P_\xi((X_1,\cdots,X_n)\in B)(B\in\mathscr{B}_{\mathscr{X}}^n).$$

引理3.5 $\tilde{P}_{\xi\cdot x_1,\cdots,x_n}(\tilde{\theta}\in A|X_{n+1},\cdots,X_m)$

$$=\xi(A|x_1,\cdots,x_n,X_{n+1},\cdots,X_m)$$

$$(\text{a.s.}\tilde{P}_{\xi\cdot x_1,\cdots,x_n}),$$

这里$\tilde{P}_\eta$是乘积空间$(\Theta\times\Omega,\mathscr{B}\times\mathscr{F})$上的测度(见§1)。

证明 设$A_1\in\mathscr{B}_{\mathscr{X}}^n$，$A_2\in\mathscr{B}_{\mathscr{X}}^{m-n}$，则

$$\tilde{P}_{\xi\cdot x_1,\cdots,x_n}(\tilde{\theta}\in A,(X_{n+1},\cdots,X_m)\in A_2)$$

$$=\int_A P_\theta((X_{n+1},\cdots,X_m)\in A_2)\xi(\mathrm{d}\theta|x_1,\cdots,x_n),$$

故

$$\int_{A_1}\tilde{P}_{\xi\cdot x_1,\cdots,x_n}(\tilde{\theta}\in A,(X_{n+1},\cdots,X_m)\in A_2)\,\mathrm{d}P_\xi^{X_1,\cdots,X_n}$$

$$=\int_{A_1}\int_A P_\theta((X_{n+1},\cdots,X_m)\in A_2)\xi(\mathrm{d}\theta|x_1,\cdots,x_n)$$

$$\cdot P_\xi^{X_1,\cdots,X_n}(\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n)$$

$$=\int_A P_\theta((X_1,\cdots,X_n)\in A_1,$$

$$\cdot(X_{n+1},\cdots,X_m)\in A_2)\xi(\mathrm{d}\theta)$$

$$=\int_{A_1\times A_2}\xi(A|x_1,\cdots,x_m)P_\xi^{X_1,\cdots,X_m}(\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_m)$$

$$=E_\xi(\xi(A|X_1,\cdots,X_m)I_{A_1\times A_2}(X_1,\cdots,X_m)).$$

另一方面，

$$\int_{A_1}\left[\int_{(X_{n+1},\cdots,X_m)\in A_2}\xi(A|x_1,\cdots,x_n,X_{n+1},\cdots,X_m)\right.$$

$$\left. d\tilde{P}_{\xi(x_1,\cdots,x_n)}\right] dP_{\xi}^{X_1,\cdots,X_n}$$

$$=\int_{A_1}E_{\xi(x_1,\cdots,x_n)}[\xi(A|x_1,\cdots,x_n,X_{n+1},\cdots,X_m)$$

$$\cdot I_{A_2}(X_{n+1},\cdots,X_m)]\, dP_{\xi}^{X_1,\cdots,X_n}$$

$$=\int_{(X_1,\cdots,X_n)\in A_1}E_{\xi(x_1,\cdots,x_n)}[\xi(A|x_1,\cdots,x_n,$$

$$X_{n+1},\cdots,X_m)I_{A_2}(X_{n+1},\cdots,X_m)]|_{x_i=X_i}dP_{\xi}\quad (i=1,\cdots,n)$$

$$=\int_{(X_1,\cdots,X_n)\in A_1}E_{\xi}[\xi(A|X_1,\cdots,X_n,X_{n+1},\cdots,X_m)$$

$$\cdot I_{A_2}(X_{n+1},\cdots,X_m)]dP_{\xi}$$

$$=E_{\xi}[I_{A_1\times A_2}(X_1,\cdots,X_m)\xi(A|X_1,\cdots,X_m)],$$

所以

$$\int_{A_1}\tilde{P}_{\xi(x_1,\cdots,x_n)}(\tilde{\theta}\in A,(X_{n+1},\cdots,X_m)\in A_2)\, dP_{\xi}^{X_1,\cdots,X_n}$$

$$=\int_{A_1}\int_{(X_{n+1},\cdots,X_m)\in A_2}\xi(A|x_1,\cdots,x_n,X_{n+1},\cdots,X_m)$$

$$\cdot\, d\tilde{P}_{\xi(x_1,\cdots,x_n)}dP_{\xi}^{X_1,\cdots,X_n}.$$

由于A_1,A_2的任意性推知，几乎所有的$x_1,\cdots,x_n$,

$$\tilde{P}_{\xi(x_1,\cdots,x_n)}(\tilde{\theta}\in A|X_{n+1},\cdots,X_m)$$

$$=\xi(A|x_1,\cdots,x_n,X_{n+1},\cdots,X_m)\ (\text{a.s.}\ \tilde{P}_{\xi(x_1,\cdots,x_n)}).$$

引理3.3证毕。

注：γ_n 是 $\mathscr{F}_n$ 可测的，从定理 3.1 知 $\rho(\xi(X_1,\cdots,X_n))$ 与一个 $\mathscr{F}_n$ 可测函数 a.s. 相等，因此通常就假定$\rho(\xi(X_1,\cdots,X_n))$是$\mathscr{F}_n$可测的。

定理3.2 令

$$\tau^*=\inf\{n:\ n\geqslant 0,\rho(\xi(X_1,\cdots,X_n))=\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_n))\},$$

则τ^*是贝叶斯停时（关于先验分布ξ而言）。

证明 记

$$z_n=\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_n))+n\cdot C(n\geqslant 0),$$

$$\gamma_n=\mathrm{e.inf}\{E_\xi\{z_\tau|\mathscr{F}_n\}:\ \tau\text{是停时},\ \tau\geqslant n\},$$

从定理2.2的证明过程知$\tau_0\triangleq\inf\{n:\ \gamma_n=z_n\}$是贝叶斯停时，但据定理3.1，$\gamma_n=\rho(\xi(X_1,\cdots,X_n))+n\cdot C$，故有

$$\tau_0=\inf\{n:\ \rho(\xi(X_1,\cdots,X_n))=\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_n))\}=\tau^*.$$

这就证明了τ^*是贝叶斯停时。

系3.1 设η是 θ 的任一先验分布，

$$z_n\triangleq\rho_0(\eta(X_1,\cdots,X_n))+n\cdot C(n\geqslant 0),$$

$$\rho(\eta)=\inf\{E_\eta z_\tau:\ \tau\geqslant 0,\tau\text{是}X_1,X_2,\cdots\text{之停时}\},$$

$$\rho^*(\eta)=\inf\{E_\eta z_\tau:\ \tau\geqslant 1,\tau\text{是}X_1,X_2,\cdots\text{之停时}\},$$

$$\tau=\inf\{n:\ n\geqslant 0,\ \rho_0(\eta(X_1,\cdots,X_n))\leqslant\rho^*(\eta(X_1,\cdots,X_n))\},$$

则τ是贝叶斯停时。

证明 因 $\rho(\eta)=\min(\rho_0(\eta),\rho^*(\eta))$，故 $\rho(\eta)=\rho_0(\eta)$成立的充要条件是$\rho_0(\eta)\leqslant\rho^*(\eta)$，从定理3.2立即推出系 1 成立。证毕。

定理3.2在理论上很重要，但实用上不方便，因为贝叶斯风险 $\rho(\xi(X_1,\cdots,X_n))$在一般情况下难以求出。关于贝叶斯风险的特征以及如何近似求出，在 De Groot(1970)的书中第十二章里有论述，在 Berger(1980)的专著里也有很多论述。

§4 一个序贯估计问题的解

设 $X_1, X_2, \cdots$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P_\theta)$ 上相互独立同分布序列，X_1 取值 0 或 1，

$$\theta = P_\theta(X_1 = 1) = 1 - P_\theta(X_1 = 0), \quad \theta \in (0,1)。$$

设 θ 之先验分布是 $(0,1)$ 上的均匀分布（记作 ξ），损失函数为

$$L(\theta, a) = \left(\frac{a - \theta}{\theta(1-\theta)}\right)^2, \tag{4.1}$$

a 的取值范围是 $[0,1]$。采取这个损失函数的意义是：当真值 θ 靠近 0 或者 1 时，只有 θ 的近似值 a 与 θ 相差很小时，损失才会小，以药品的疗效为例，若病人使用该药后被治愈，则规定 $X = 1$，若未被治愈，则规定 $X = 0$。医药试验的重要任务是估计治愈概率 $\theta = P(X = 1)$ 有多大，当 θ 很小或者很接近于 1 时，则可以下结论：前者情况下，药品应该淘汰，后者情况下药品值得广泛提倡使用（当 θ 的值不太小也不太大时，则难以下什么结论）。为了判断 θ 是否真的很接近于 0 或 1，要求 θ 的估计值 a 十分接近于 θ，损失函数(4.1)正好反映了这种要求。

我们设单项观测的费用是 $C > 0$，我们来寻求对应损失函数(4.1)且初始分布为均匀分布的贝叶斯判决法则（贝叶斯估计）。我们知道，在观察了 $X_1, \cdots, X_n$（n 固定）后，θ 的后验分布是 β 分布即为 $\beta(S_n + 1, f_n + 1)$，这里

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad f_n = n - S_n \quad (n \geq 1),$$

现如何来估计 θ 呢？

设 $\delta = \delta(X_1, \cdots, X_n)$ 是 θ 之任一估计，则后验风险是

$$I(\delta) = \int_0^1 \left[\frac{\delta(X_1, \cdots, X_n) - \theta}{\theta(1-\theta)}\right]^2 \xi(\mathrm{d}\,\theta \mid X_1, \cdots, X_n)$$

$$= \frac{1}{B(S_n+1, f_n+1)} \int_0^1 \left[\frac{\delta-\theta}{\theta(1-\theta)}\right]^2 \theta^{S_n}(1-\theta)^{f_n} \mathrm{d}\,\theta. \tag{4.2}$$

当 $n=0$ 时，$\xi(\mathrm{d}\,\theta\ X_1,\cdots,X_n)$理解为初始分布(均匀分布)，$\delta(X_1,\cdots,X_n)$看作固定常数。

当 $n=0,1$ 时，易知 $I(\delta)=\infty$(一切 δ)，故有

$$\rho_0(\xi)=\infty, \quad \rho_0(\xi(X_1))=\infty.$$

当 $n=2$ 时，$I(\delta_2^*)\leqslant I(\delta)$，这里 $\delta_2^*=\frac{1}{2}S_2$，而且

$$\rho_0(\xi(X_1,X_2))=\begin{cases}3, & \text{当 } S_2=0,2,\\ \infty, & \text{当 } S_2=1.\end{cases}$$

下设 $n\geqslant 3$. 易知

$$I'(\delta)=\frac{2}{B(S_n+1,f_n+1)}\int_0^1\left[\frac{\delta-\theta}{\theta(1-\theta)}\right]\theta^{S_n-1}(1-\theta)^{f_n-1}\mathrm{d}\,\theta,$$

$$I''(\delta)=\frac{2}{B(S_n+1,f_n+1)}\int_0^1\theta^{S_n-2}(1-\theta)^{f_n-2}\mathrm{d}\,\theta>0,$$

容易求得使后验风险达到最小的 δ_n^*:

$$\delta_n^*=\begin{cases}\frac{1}{n-2}(S_n-1), & \text{当 } 1\leqslant S_n\leqslant n-1,\\ \frac{1}{n}S_n, & \text{当 } S_n=0 \text{ 或 } n,\end{cases}$$

而且

$$\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_n))=I(\delta_n^*)$$

$$=\begin{cases}\frac{n(n+1)}{(n-2)S_nf_n}, & \text{当 } 1\leqslant S_n\leqslant n-1,\\ \frac{n+1}{n-1}, & \text{当 } S_n=0 \text{ 或 } n.\end{cases}$$

显然 $\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_n))$只依赖于 S_n。以下当 $n\geqslant 3$ 时，令

$$H_n(S)=\begin{cases}\dfrac{n(n+1)}{(n-2)S(n-S)}, & \text{当 } 1\leqslant S\leqslant n-1,\\[2ex] \dfrac{n+1}{n-1}, & \text{当 } S=0 \text{ 或 } n,\end{cases}$$

而

$$H_0(S)=H_1(S)\equiv\infty,$$

$$H_2(S)=\begin{cases}\infty, & \text{当 } S=1,\\ 3, & \text{当 } S=0 \text{ 或 } 2.\end{cases}$$

易知

$$\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_n))=H_n(S_n). \tag{4.3}$$

记

$$\xi_n=-H_n(S_n)-n\cdot C\ \ (n\geqslant 0),$$

$$\mathscr{F}_n=\sigma(X_1,\cdots,X_n)\ \ (n\geqslant 1),$$

$$\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\},$$

于是寻求贝叶斯序贯判决法则就化为寻求序列 $(\xi_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$之最优停时，即寻求停时 τ^* 使得

$$E_\xi(\xi_{\tau^*})\geqslant E_\xi(\xi_\tau)\ \ (\text{对一切停时 } \tau).$$

首先指出，最优停时 τ^* 是存在的. 实际上，当 $n\geqslant 3$，$1\leqslant S_n\leqslant n-1$ 时，$S_n f_n\geqslant n-1$，从而

$$0\leqslant H_n(S_n)\leqslant\frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)}\leqslant 6;$$

当 $S_n=0$ 或 $S_n=n$ 时，

$$H_n(S_n)=\frac{n+1}{n-1}\leqslant 6.$$

总之，只要 $n\geqslant 3$，总有 $0\leqslant H_n(S_n)\leqslant 6$，于是对一切 $n\geqslant 0$，

$$-H_n(S_n)\leqslant 0\quad \text{且}\quad -H_n(S_n)-nC\to-\infty(n\to\infty)$$

根据第一章定理，知最优停时 τ^* 存在且有限. 下面指出存在有

界的最优停时，即贝叶斯判决法则是截断型的。

引理 4.1 $P_\xi(S_{n+1}=S_n\mid\mathscr{F}_n)=\dfrac{f_n+1}{n+2}$ (a.s.)，

$$P_\xi(S_{n+1}=S_n+1\mid\mathscr{F}_n)=\frac{S_n+1}{n+2}\ \text{(a.s.)}.$$

证明 实际上，若 $P_\xi(X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n)>0$，则

$$\begin{aligned}
&P_\xi(S_{n+1}=S_n+1\mid X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n)\\
&=\frac{P_\xi(X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n,X_{n+1}=1)}{P_\xi(X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n)}\\
&=\frac{\int_0^1\theta^{i_1+\cdots+i_n+1}(1-\theta)^{n+1-(i_1+\cdots+i_n+1)}\mathrm{d}\theta}{\int_0^1\theta^{i_1+\cdots+i_n}(1-\theta)^{n-i_1-\cdots-i_n}\mathrm{d}\theta}\\
&=\frac{i_1+\cdots+i_n+1}{n+2},
\end{aligned}$$

故

$$P_\xi(S_{n+1}=S_n+1\mid\mathscr{F}_n)=\frac{S_n+1}{n+2}\ \text{(a.s.)}.$$

由此推出

$$P_\xi(S_{n+1}=S_n\mid\mathscr{F}_n)=\frac{f_n+1}{n+2}\ \text{(a.s.)}$$

证毕。

引理 4.1 告诉我们，$(S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$在$(\Omega,\mathscr{F},P_\xi)$上是非齐次的马氏链($S_0=0$)。令

$$m(C)=\inf\left\{n;\ n\geqslant 3,\ \frac{n(n+1)}{(n-1)^2(n-2)}\leqslant C\right\}\triangleq n_0,$$

$$\tau_0=\inf\left\{n;\ n\geqslant 3,\ S_nf_n\geqslant\frac{n(n+1)}{(n-2)(n-1)C}\right\}.$$

不难看出 $\tau_0 \leqslant m(C) \leqslant \frac{1}{C}+5$.

下面要证明，存在最优停时 $\tau^* \leqslant m(C)$. 首先计算

$$
\begin{aligned}
& E_\xi(\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_{n+1}))|\mathscr{F}_n) \\
& = E_\xi(H_{n+1}(S_{n+1})|\mathscr{F}_n) \\
& = E_\xi\{I_{(S_{n+1}=S_n)}H_{n+1}(S_{n+1})|\mathscr{F}_n\} \\
& \quad + E_\xi(I_{(S_{n+1}=S_n+1)}H_{n+1}(S_{n+1})|\mathscr{F}_n) \\
& = \frac{H_{n+1}(S_n)(f_n+1)+H_{n+1}(S_n+1)(S_n+1)}{n+2}.
\end{aligned}
$$

从 $H_n(S_n)$ 之表达式知，$n \geqslant 3$ 时有

$$
E_\xi(\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_{n+1}))|\mathscr{F}_n)
= \begin{cases} \dfrac{n(n+1)}{(n-1)S_n f_n}, & \text{当 } 1 \leqslant S_n \leqslant n-1, \\[2ex] \dfrac{n+1}{n-1}, & \text{当 } S_n = 0 \text{ 或 } n. \end{cases}
$$

故为了

$$\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_n)) \leqslant E_\xi[\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_{n+1}))|\mathscr{F}_n]+C$$

成立，必须且只须

$$\frac{n(n+1)}{(n-2)S_n f_n} \leqslant \frac{n(n+1)}{(n-1)S_n f_n}+C \quad (\text{当 } 1 \leqslant S_n \leqslant n-1),$$

即必须且只须

$$\frac{n(n+1)}{S_n f_n(n-2)(n-1)} \leqslant C \quad (\text{当 } 1 \leqslant S_n \leqslant n-1).$$

令

$$n_0 = \min\left\{n:\ n \geqslant 3, \frac{n(n+1)}{(n-2)(n-1)^2} \leqslant C\right\},$$

由于 $\frac{n(n+1)}{(n-2)(n-1)^2}$ 是 n 的减函数，故当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_n))\leqslant E_\xi[\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_{n+1}))|\mathscr{F}_n]+C,$$

从定理 2.2 知存在最优停时 $\tau^*\leqslant n_0$。

我们来用后退归纳法寻求这个最优停时 τ^*. 记

$$\xi_n=\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_n))+n\cdot C\quad(n\geqslant 1),$$

$$\xi_{n_0}^{n_0}=\xi_{n_0},$$

$$\xi_k^{n_0}=\min(\xi_k,E_\xi(\xi_{k+1}^{n_0}|\mathscr{F}_K))\quad(k=n_0-1,n_0-2,\cdots,2),$$

$$\tau^*=\min\{k:\ 2\leqslant k\leqslant n_0,\xi_k^{n_0}=\xi_k\}.$$

从第一章 § 2 中的最优停止理论知,这个 τ^* 便是最优停时。 我们可以用归纳法证明

$$\xi_k^{n_0}=f_k^{n_0}(S_k)\quad 且\quad f_k^{n_0}(l)=f_k^{n_0}(k-l),$$

这里 $f_k^{n_0}(\cdot)$是一元 Borel 函数。 实际上 $k=n_0$ 时结论显然成立,这时取 $f_{n_0}^{n_0}(S)$为:

$$f_{n_0}^{n_0}(S)=\begin{cases}\dfrac{n_0(n_0+1)}{(n_0-2)S(n_0-S)}, & 当\ 1\leqslant S\leqslant n-1,\\[2ex] \dfrac{n_0+1}{n_0-1}, & 当\ S=0\ 或\ n_0\end{cases}$$

即可。设 $K=i$ 时结论成立,即

$$\xi_i^{n_0}=f_i^{n_0}(S_i)\quad 且\quad f_i^{n_0}(l)=f_i^{n_0}(i-l),$$

我们来研究 $k=i-1$ 的情形.

$$\begin{aligned}E(\xi_i^{n_0}|\mathscr{F}_{i-1})&=E(f_i^{n_0}(S_i)|\mathscr{F}_{i-1})\\&=E\{I_{(S_i=S_{i-1})}f_i^{n_0}(S_{i-1})|\mathscr{F}_{i-1}\}\\&\quad+E\{I_{(S_i=S_{i-1}+1)}f_i^{n_0}(S_{i-1}+1)|\mathscr{F}_{i-1}\}\\&=f_i^{n_0}(S_{i-1})\frac{i-S_{i-1}}{i+1}+f_i^{n_0}(S_{i-1}+1)\frac{S_{i-1}+1}{i+1}\\&=f_i^{n_0}(S_{i-1})\frac{i-S_{i-1}}{i+1}+f_i^{n_0}(S_{i-1}+1)\frac{S_{i-1}+1}{i+1}.\end{aligned}$$

令

$$f^{n_0}_{i-1}(S)=\min\Big\{H_{i-1}(S)+(i-1)C,$$

$$f^{n_0}_{i}(S)\frac{i-S}{i+1}+f^{n_0}_{i}(S+1)\frac{S+1}{i+1}\Big\}, \qquad (4.4)$$

则 $\xi^{n_0}_{i-1}=f^{n_0}_{i-1}(S_{i-1})$，且

$$f^{n_0}_{i-1}(i-1-l)=\min\Big\{H_{i-1}(i-1-l)+(i-1)C,$$

$$f^{n_0}_{i}(i-1-l)\frac{l+1}{i+1}+f^{n_0}_{i}(i-l)\frac{i-l}{i+1}\Big\}$$

$$=\min\Big\{H_{i-1}(l)+(i-1)C,$$

$$f^{n_0}_{i}(l+1)\frac{l+1}{i+1}+f^{n_0}_{i}(l)\frac{i-l}{i+1}\Big\}$$

$$=f^{n_0}_{i-1}(l).$$

这表明$k=i-1$时结论也成立。

特别 $f^{n_0}_{k}(0)=f^{n_0}_{k}(k)$ $(k\leqslant n_0)$，令

$$n_1=\min\Big\{k;\ k\geqslant 2,\ \ f^{n_0}_{k}(0)=\frac{k+1}{k-1}+k\cdot C\Big\}. \qquad (4.5)$$

由于 $f^{n_0}_{n_0}(0)=\dfrac{n_0+1}{n_0-1}+n_0C$，故 $n_1\leqslant n_0$。以下分几种情况分别讨论。

① $S_1=0,S_2=0,\cdots,S_{n_1}=0$。此时

$$\tau^*=\min\{k;\ k\leqslant n_0,\ \xi^{n_0}_{k}=\xi_k\}$$

$$=\min\Big\{k;\ k\leqslant n_0\ \ \ f^{n_0}_{k}(0)=\frac{k+1}{k-1}+k\cdot C\Big\}=n_1.$$

② $S_1=1, S_2=2, \cdots, S_{n_1}=n_1$。此时

$$\tau^*=\min\{k:\ k\leqslant n_0,\quad \xi_k^{n_0}=\xi_k\}$$

$$=\min\{k:\ k\leqslant n_0,\ f_k^{n_0}(S_k)=H_k(S_k)+k\cdot C\}$$

$$=\min\{k:\ k\leqslant n_0\quad f_k^{n_0}(k)=H_k(k)+k\cdot C\}$$

$$=\min\left\{k:\ k\leqslant n_0,\ f_k^{n_0}(0)=\frac{k+1}{k-1}+kC\right\}=n_1.$$

③ 存在 $k\leqslant n_1$，使 $1\leqslant S_k\leqslant k-1$。此时

$$\tau^*=\min\{k:\ k\leqslant n_0,\ \xi_k^{n_0}=\xi_k\}=\tau_1,$$

$$\tau_1=\min\left\{\ k:\ k\geqslant 3, S_k f_k\geqslant\frac{k(k+1)}{(k-2)(k-1)C}\right\}.$$

理由如下：易知

$$\{E(\xi_{k+1}|\mathscr{F}_k)\geqslant\xi_k\}=\{S_k=0\text{ 或}k\}\cup\left\{\ S_k f_k\geqslant\frac{k(k+1)}{(k-2)(k-1)C}\right\}.$$

另一方面，$S_k f_k$ 是 k 之增函数，$\dfrac{k(k+1)}{(k-2)(k-1)C}$ 是 k 之减函数，故

$$\{\tau_1=k\}\subset\{E(\xi_{l+1}|\mathscr{F}_l)\geqslant\xi_l\}\ \ (l\geqslant k).$$

由于 $\xi_{n_0}^{n_0}=\xi_{n_0}$，由后退归纳法知

$$\{\tau_1=k\}\subset\{\xi_k^{n_0}=\xi_k\},$$

故
$$\tau^*\leqslant\tau_1.$$

另外，在集合

$$\{S_{k-1}=0\text{ 或 }S_{k-1}=k-1\}$$

上，
$$\xi_{k-1}^{n_0}<\xi_{k-1}.$$

在集合

$$\{1\leqslant S_{k-1}\leqslant k-1\}\cap\{\tau_1=k\}$$

上，
$$S_k f_{k-1}<\frac{(k-1)k}{(k-2)(k-3)C}.$$

故
$$E(\xi_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) < \xi_{k-1},$$
于是
$$\xi^{n_0}_{k-1} = \min(\xi_{k-1}, E(\xi_k \mid \mathscr{F}_{k-1})) < \xi_{k-1}.$$
用归纳法知，在$\{\tau_1 = k\}$上，对一切$i<k$有$\xi^{n_0}_i<\xi_i$，故$\tau^* \geqslant k = \tau_1$。

总之$\tau^* = \tau_1$。于是
$$\tau^* = \begin{cases} n_1, & \text{当 } S_{n_1} = 0 \text{ 或 } n_1, \\ \inf\left\{ n: S_n f_n \geqslant \dfrac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)C} \right\}, & \text{否则} \end{cases}$$
是最优停时，其中n_1由(4.5)确定，(4.5)中的$f^{n_0}_k(0)$则由递推公式(4.4)逐步求出。有了最优停时τ^*，自然就得到θ的贝叶斯估计δ^*。δ^*为：
$$\delta^* = \begin{cases} \dfrac{1}{\tau^*-2}(S_{\tau^*}-1), & \text{当 } 1 \leqslant S_{\tau^*} \leqslant \tau^*-1, \\ 0, & \text{当 } S_{\tau^*} = 0, \\ 1, & \text{当 } S_{\tau^*} = \tau^*. \end{cases}$$

以上是假定贝努里分布中的参数θ的先验分布为(0,1)上均匀分布。如果先验分布是一般的β分布$\beta(a,b)$，则仿效上面的方法可求出θ的贝叶斯估计(损失函数仍假定和上面的一样)。当$a\geqslant 2$，$b\geqslant 2$时，最优停时是
$$\tau^* = \inf\{n: n\geqslant 1, \ (S_n + a - 1)(f_n + b - 1)$$
$$\geqslant \frac{1}{C}\frac{(n+a+b-1)(n+a+b-2)}{(n+a+b-3)(n+a+b-4)}\}.$$
易知τ^*是有界的。有了τ^*，可求出参数θ的贝叶斯估计为：
$$\delta^* = \frac{S_{\tau^*} + a - 2}{\tau^* + a + b - 4}.$$

本节内容是基于 Cabilio，P.(1977)的工作写出的。

§5 贝叶斯序贯检验

在§2中我们建立了贝叶斯序贯统计判决的一般理论，本节是将这个理论应用到单参数指数族分布的假设检验上去。

设 $X_1, X_2, \cdots$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P_\theta)(\theta \in \Theta)$ 上的独立同分布随机变量列，这里 Θ 是一个有限或无限区间，X_1 的分布函数是 $F(x,\theta)$，分布密度(关于 Lebesgue 测度)是

$$f(x,\theta) = \exp\{\theta x - \psi(\theta)\} \cdot h(x). \tag{5.1}$$

设 θ_0 是 Θ 的一个内点。我们考虑下列检验问题：

$$H_1:\ \theta \leqslant \theta_0 \Longleftrightarrow H_2:\ \theta > \theta_0. \tag{5.2}$$

设 ξ 是 θ 的先验分布，即 $(\Theta, \mathscr{B}_\Theta)$ 上的概率测度，这里 $\mathscr{B}_\Theta$ 由 Θ 的一切 Borel 子集组成。单次观测的费用是 C(正常数)。我们来研究上述检验问题的贝叶斯解。我们恒假定先验分布 ξ 满足下列很自然的条件：

$$\begin{aligned} &\xi((-\infty, \theta_0] \cap \Theta) > 0, \\ &\xi((\theta_0, \infty) \cap \Theta) > 0, \end{aligned} \tag{5.3}$$

这里 $\xi(B)$ 表示参数 θ 属于 B 的(先验)概率。

假设检验相当于行动空间 A 由两个元素组成的统计判决模型。用 a_1 表示接受假设 H_1: $\theta \leqslant \theta_0$，$a_2$ 表示接受假设 H_2: $\theta > \theta_0$。我们假定损失函数 $L(\theta, a)$ 满足下列要求：

1) $L(\theta, a_i)$ 是 θ 的非负 Borel 可测函数；

2) $L(\theta, a_1) - L(\theta, a_2)$ 是 θ 的增函数；

3) $\int_\Theta L(\theta, a_i)\xi(d\theta) < \infty \quad (i = 1, 2)$；

4) $\xi\{\theta : L(\theta, a_1) < L(\theta, a_2)\} > 0, \xi\{\theta : L(\theta, a_1) > L(\theta, a_2)\} > 0$。

例如取

$$L(\theta, a_1) = w_1 I_{(\theta_0, \infty)}(\theta),$$

$$L(\theta,a_2)=w_2 I_{(-\infty,\theta_0]}(\theta),$$

$(w_1>0, w_2>0)$就满足上述四个条件。

在得到 n 个观测值 $X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n$ 下 θ 的后验分布为 $\xi(x_1,\cdots,x_n)$，从§1 知

$$\xi(x_1,\cdots,x_n)(B)=\frac{\int_B \exp\left\{\theta\sum_1^n x_i-n\psi(\theta)\right\}\xi(d\,\theta)}{\int_\Theta \exp\left\{u\sum_1^n x_i-n\psi(u)\right\}\xi(d\,u)},\quad(5.4)$$

可见 $\xi(x_1,\cdots,x_n)$的分布密度(关于测度 ξ)是

$$f_{nt}(s)=\frac{e^{st-n\psi(s)}}{\int_\Theta e^{ut-n\psi(u)}\xi(d\,u)},\qquad(5.5)$$

其中 $t=\sum_1^n x_i$。

我们以下恒用 $\tau_{nt}\xi$ 表示后验分布 $\xi(x_1,\cdots,x_n)$，采用行动 a_i 后的后验风险(不包括观测费用)是

$$L(\tau_{nt}\xi,a_i)\triangleq\int_\Theta L(\theta,a_i)\xi(x_1,\cdots,x_n)(d\,\theta)$$

$$=\int_\Theta L(\theta,a_i)f_{nt}(\theta)\xi(d\,\theta)\left(t=\sum_1^n x_i\right).$$

可见在 $X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n$ 下的贝叶斯风险(不计观测费用)是

$$\rho_0(\tau_{nt}\xi)=\min_{i=1,2}\{L(\tau_{nt}\xi,a_i)\},$$

其中 $t=\sum_1^n x_i$。n 次观测后应采取的行动 a_{i_n} 满足

$$L(\tau_{nt}\xi,a_{i_n})=\rho_0(\tau_{nt}\xi).$$

令

$$L(\theta)=L(\theta,a_1)-L(\theta,a_2),$$

$$L(n,v)=\int_\Theta L(\theta)\tau_{nv}\xi(\mathrm{d}\,\theta).$$

引理 5.1 $L(n,v)$是v的连续增函数。

证明 首先指出：分布族

$$\{\tau_{nv}\xi:\ v\in(-\infty,\infty)\}$$

是有单调似然比的。实际上，$\tau_{nv}\xi$的分布密度是$f_{nv}(s)$(关于测度$\xi(\cdot)$)(见(5.5))。设$v_1<v_2$。易知

$$f_{nv_2}(s)/f_{nv_1}(s)=e^{s(v_2-v_1)}k_n(v_1)/k_n(v_2),$$

这里

$$k_n(v)=\int_\Theta e^{\theta v-n\psi(\theta)}\xi(\mathrm{d}\,\theta).$$

故$f_{nv_2}(s)/f_{nv_1}(s)$是s的增函数。所以

$$\{\tau_{nv}\xi:\ v\in R\}$$

是有单调似然比的。利用第二章引理 8.2 知

$$L(n,v)=\int_\Theta L(\theta)\tau_{nv}\xi(\mathrm{d}\,\theta)$$

是v的增函数。利用控制收敛定理不难看出$L(n,v)$是v的连续函数。证毕。

根据假定

$$\xi(\theta:L(\theta)>0)>0,\quad \xi(\theta:L(\theta)<0)>0$$

知$L(n,v)$既取正值，也取负值，故有v_n^0满足

$$L(n,v_n^0)=0. \tag{5.6}$$

由此看出，如果在n次观测后停止，则$\sum_1^n X_i\geqslant v_n^0$时应取行动$a_2$(即拒绝假设$H_1$)，$\sum_1^n X_i<v_n^0$时应取行动$a_1$(即接受假设$H_1$)。

下面研究应在何时停止观测，即寻找贝叶斯停时。

对 θ 的任何先验分布 η，令

$$\lambda(\eta)\triangleq\rho_0(\eta)-E_\eta\rho_0(\eta(X_1)), \tag{5.7}$$

这里 ρ_0 的含义与§2中的一样。

定理5.1 若存在正整数 m 满足

i) $E_\xi\{\sup\limits_{n\geq m}\rho_0[\xi(X_1,\cdots,X_n)]\}<\infty$；

ii) 对一切 $n\geq m$，

$$\lambda(\xi(X_1,\cdots,X_n))\leqslant C\ \ (\text{a.s.}P_\xi), \tag{5.8}$$

则存在贝叶斯停时 τ^* 满足

$$P_\xi(\tau^*\leqslant m)=1.$$

证明 从引理3.2知

$$E_\xi(\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_{n+1}))|X_1,\cdots,X_n)$$
$$=E_{\xi(x_1,\cdots,x_n)}(\rho_0(\xi(x_1,\cdots,x_n,X_{n+1})))|_{x_i=X_i,i=1,\cdots,n}.$$

但是

$$\xi(x_1,\cdots,x_n)(X_{n+1})=\xi(x_1,\cdots,x_n,X_{n+1})(\text{a.s.}\bar{P}_{\xi(x_1,\cdots,x_n)})$$

($\bar{P}_{\xi(x_1,\cdots,x_n)}$的含义见§3)，故

$$\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_n))-E_\xi(\rho_0(\xi(X_1,\cdots,X_{n+1}))|X_1,\cdots,X_n)$$
$$=\lambda(\xi(X_1,\cdots,X_n)).$$

从定理2.2即推知定理5.1成立。证毕。

为了应用定理5.1，对任意固定的 n，研究随机变量 $\lambda(\xi(X_1,\cdots,X_n))$的上确界$\|\lambda(\xi(X_1,\cdots,X_n))\|$(若 $f(\omega)$是随机变量,定义

$$\|f(\omega)\|=\inf\{a:\ P_\xi(\omega:f(\omega)>a)=0\})。$$

令

$$\lambda(n,v)\triangleq\lambda(\tau_{nv}\xi),$$

这里

$$\tau_{nv}\xi(B)=\int_B f_{nv}(s)\xi(\mathrm{d}s),$$

$f_{nv}(s)$的定义见(5.5)。

定理 5.2 (Ray, 1965)

$$\|\lambda(\xi(X_1,\cdots,X_n))\| = \left\|\lambda\left(n,\sum_1^n X_i\right)\right\| = \lambda(n,v_n^0)$$

$$= \int_\theta L(\theta)F(v_{n+1}^0 - v_n^0,\theta)\tau_{nv_n^0}\xi(d\theta),$$

其中 v_n^0 由(5.6)确定。

证明 首先指出，对任何先验分布 η，有

$$\lambda(\eta) = \frac{1}{2}E_\eta\{L(\eta(X_1)\} - \frac{1}{2}|L(\eta)|, \tag{5.9}$$

这里 $\eta(x_1)$是先验分布 η，为观测到 $X_1 = x_1$ 时 θ 的后验分布。由于

$$a\wedge b = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|),$$

所以

$$\lambda(\eta) = \frac{1}{2}(L(\eta,a_1)+L(\eta,a_2)-|L(\eta)|)$$

$$-E_\eta\left(\frac{1}{2}[L(\eta(X_1),a_1)+L(\eta(X_1),a_2)-|L(\eta(X_1))|]\right)$$

$$=\frac{1}{2}E_\xi|L(\eta(X_1))| - \frac{1}{2}|L(\eta)| + \frac{1}{2}[L(\eta,a_1)$$

$$-E_\eta(L(\eta(X_1)),a_1)] + \frac{1}{2}[L(\eta,a_2)-E_\eta(L(\eta(X_1)),a_2)].$$

从引理 3.1 知

$$L(\eta,a_i) = \int_\theta L(\theta,a_i)\eta(d\theta)$$

$$= \int_\Omega\int_\theta L(\theta,a_i)\eta(d\theta|X_1)P_\eta(d\omega)$$

$$= \int_\Omega L(\eta(X_1),a_i)P_\eta(d\omega)$$

$$= E_\eta(L(\eta(X_1), a_t).$$

故(5.9)成立。令 $v_n = \sum_1^n X_i$，从(5.9)知

$$2\lambda(n, v_n) = E_{\tau_{n v_n}\xi}(|L(\tau_{n v_n}\xi(X_{n+1}))|) - |L(\tau_{n v_n}\xi)|.$$

但

$$\begin{aligned} L(\tau_{n v_n}\xi(X_{n+1}))' & \\ &= L(\xi(x_1, \cdots, x_n, X_{n+1})|_{x_i = X_i, i=1,\cdots,n} \\ &= L(\tau_{n+1, v_n + X_{n+1}}\xi) \\ &= L(n+1, v_n + X_{n+1}), \end{aligned}$$

故

$$2\lambda(n, v_n) = E_{\tau_{n v_n}\xi}|L(n+1, v_n + X_{n+1})| - |L(n, v_n)|$$

令 $U_a(y) = I_{(a,\infty)}(y)$，易知

$$\begin{aligned} &|L(n+1, v)| \\ &\quad = L(n+1, v)U_{v^0_{n+1}}(v) - L(n+1, v)[1 - U_{v^0_{n+1}}(v)]. \end{aligned}$$

用 $v_n + X_{n+1}$ 代替 v，知

$$E_{\tau_{n v_n}\xi}|L(n+1, v_n + X_{n+1})| = h_1(v_n) + h_2(v_n),$$

这里

$$h_1(v_n) = E_{\tau_{n v_n}\xi}\{L(n+1, v_n + X_{n+1})U_{v^0_{n+1}}(v_n + X_{n+1})\},$$

$$h_2(v_n) = E_{\tau_{n v_n}\xi}\{-L(n+1, v_n + X_{n+1})[1 - U_{v^0_{n+1}}(v_n + X_{n+1})]\},$$

但是

$$h(v_n) - h_2(v_n) = E_{\tau_{n v_n}\xi}\{L(n+1, v_n + X_{n+1})\},$$

$$\int_\Theta L(\theta)\tau_{n v_n}\xi(\mathrm{d}\theta) = L(n, v_n).$$

于是有

$$\lambda(n, v_n) = \begin{cases} h_1(v_n), & \text{当 } v_n < v_n^0, \\ h_2(v_n), & \text{当 } v_n \geqslant v_n^0. \end{cases}$$

我们指出 $h_1(v)$ 是 v 的不减函数。实际上，

$$h_1(v)=\int_{\Omega} g_1(v,s)f_{nv}(s)\xi(\mathrm{d}\,s),$$

这里 $f_{nv}(s)$ 的定义见(5.5)，

$g_1(v,s)=L(n+1,v+s)U_{v^0_{n+1}}(v+s)$。由于 $g_1(v,s)$ 是 v,s 的增函数，故 $h_1(v)$ 是 v 的不减函数。同理，$h_2(v)$ 是 v 的非增函数。故

$$
\begin{aligned}
\|\lambda(n,v_n)\| &= \lambda(n,v^0_n)=h_2(v^0_n)\\
&=E_{\tau_{nv^0_n}\xi}\{-L(n+1,v^0_n+X_{n+1})I_{(-\infty,v^0_{n+1}-v^0_n]}(X_{n+1})\}\\
&=\left|\int_{\Theta}\int_{\Omega}L(n+1,v^0_n+X_{n+1})I_{(-\infty,v^0_{n+1}-v^0_n]}(X_{n+1})P_\theta(\mathrm{d}\,\omega)\right.\\
&\quad\left.\times\tau_{nv^0_n}\xi(\mathrm{d}\,\theta)\right|\\
&=\left|\int_{\Theta}L(\theta)F(v^0_{n+1}-v^0_n,\theta)\tau_{nv^0_n}\xi(\mathrm{d}\,\theta)\right|,
\end{aligned}
$$

这里 $F(x,\theta)$ 乃 X_1 的分布函数。定理 5.2 证毕。

令

$$n_0=\inf\{m:\ \text{对一切}\ n\geqslant m,\lambda(n,v^0_n)\leqslant C\}. \tag{5.10}$$

从定理 5.1 及定理 5.2 知，贝叶斯停时 $\tau^*\leqslant n_0$(a.s. P_ξ)。(5.10)式可用来确定贝叶斯停时的上界。

例 5.1(正态分布)　$X_1,X_2,\cdots$ 是独立同分布随机变量列，X_1 的分布密度

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2\right\},\ \theta\in\Theta=(-\infty,\infty).$$

损失函数如下：

$$L(\theta,a_1)=\begin{cases}0, & \theta\leqslant\theta_0,\\ k(\theta-\theta_0), & \theta>\theta_0,\end{cases}$$

$$L(\theta, a_2) = \begin{cases} k(\theta - \theta_0) & \theta \leqslant \theta_0, \\ 0 & \theta > \theta_0, \end{cases}$$

这里 k 是正常数，a_1 是"接受假设 H_1: $\theta \leqslant \theta_0$"，$a_2$ 是"接受假设 H_2: $\theta > \theta_0$"。

假定单次观测费用是 C（正数）。设 θ 的先验分布是 $N(\mu_0, \sigma_0^2)$，易知在 $X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n$ 下 θ 的后验分布 $\xi(x_1, \cdots, x_n)$ 为 $N(\mu_n, \sigma_n^2)$，这里

$$\mu_n = \frac{1}{n + \sigma_0^{-2}}(v_n + \mu_0 \sigma_0^{-2})\left(v_n = \sum_1^n x_i\right),$$

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n + \sigma_0^{-2}}.$$

易知

$$L(\theta) \triangleq L(\theta, a_1) - L(\theta, a_2) = k(\theta - \theta_0).$$

$$\begin{aligned} L(n, v_n) &= \int_\Theta L(\theta) \tau_{n v_n} \xi(d\theta) \\ &= k \int_\Theta (\theta - \theta_0)(\sqrt{2\pi}\,\sigma_n)^{-1} \\ &\quad \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}(\theta - \mu_n)^2 d\theta\right\} \\ &= k(\mu_n - \theta_0) \\ &= k((n + \sigma_0^{-2})^{-1}(v_n + \mu_0 \sigma_0^{-2}) - \theta_0). \end{aligned}$$

故

$$v_n^0 = (n + \sigma_0^{-2})\theta_0 - \mu_0 \sigma_0^{-2},$$

于是 $v_{n+1}^0 - v_n^0 = \theta_0$，可见 $\tau_{n v_n^0} \xi$ 为 $N(\theta_0, \sigma_n^2)$。从定理 5.2 知

$$\begin{aligned} \|\lambda(\tau_{n v_n^0} \xi)\| &= \lambda(n, v_n^0) \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} k(\theta - \theta_0) \int_{-\infty}^{\theta_0} (\sqrt{2\pi})^{-1} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2} dx \right. \\ &\quad \left. \cdot (\sqrt{2\pi}\,\sigma_n)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}(\theta - \theta_0)^2\right\} d\theta \right| \end{aligned}$$

$$=k(\sqrt{2\pi})^{-1}(1+\sigma_n^2)^{-\frac{1}{2}}\sigma_n^2$$

$$=k(\sqrt{2\pi})^{-1}[(n+\sigma_0^{-2})^2+(n+\sigma_0^{-2})]^{-\frac{1}{2}}.$$

由此看出，$\lambda(n,v_n^0)$是n的减函数。从(5.10)知

$$n_0=\inf\{n:\ n\geqslant 1,\lambda(n,v_n^0)\leqslant C\}$$

$$=\inf\{n:\ n\geqslant 1,n\geqslant((2\pi C^2)^{-1}k^2+4^{-1})^{\frac{1}{2}}-2^{-1}-\sigma_0^{-2}\}.$$

贝叶斯停时 $\tau^*\leqslant n_0$ (a.s. P_ξ)。

例 5.2(贝努里分布) 设 $X_1,X_2,\cdots$ 是独立同分布的随机变量列，$X_i=0$ 或 1，

$$P_\theta(X_1=1)=\theta=1-P_\theta(X_1=0)\quad(0<\theta<1).$$

设 $\theta_0\in(0,1)$。用 a_1 表示"接受假设 H_1：$\theta\leqslant\theta_0$"，a_2 表示"接受假设 H_2：$\theta>\theta_0$"。单次观测费用是C(正数)。损失函数和例5.1中的一样。

设 θ 的先验分布 ξ 为 β 分布 $\beta(a_0,b_0)$,则在 $X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n$ 下 θ 的后验分布 $\tau_{nv_n}\xi$ 为 $\beta(a,b)$，其中

$$a=a_0+v_n,\quad b=b_0+n-v_n,\quad v_n=\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

由于 X_1 的分布不对 Lebesgue 测度绝对连续，不能用定理5.2去求 n_0。我们来直接计算 $\lambda(\tau_{nv_n}\xi)$。记

$$L(\theta)\triangleq L(\theta,a_1)-L(\theta,a_2)=K(\theta-\theta_0).$$

用 ξ_{ab} 表示 β 分布 $\beta(a,b)$。从(5.9)知

$$2\lambda(\xi_{ab})=E_{\xi_{ab}}|L(\xi_{ab}(X_1))|-|L(\xi_{ab})|$$

$$=|L(\xi_{a+1,b})|\int_0^1P_\theta(X_1=1)\xi_{ab}(\mathrm{d}\theta)$$

$$+|L(\xi_{ab+1})|\int_0^1P_\theta(X_1=0)\xi_{ab}(\mathrm{d}\theta)$$

$$-|L(\xi_{ab})|.$$

但

$$L(\xi_{ab}) = \int_0^1 L(\theta)\xi_{ab}(\mathrm{d}\theta)$$

$$= K\int_0^1 (\theta-\theta_0)\xi_{ab}(\mathrm{d}\theta)$$

$$= K[(a+b)^{-1}a-\theta_0],$$

$$\int_0^1 P_\theta(X_1=1)\xi_{ab}(\mathrm{d}\theta) = \int_0^1 \theta\xi_{ab}(\mathrm{d}\theta) = (a+b)^{-1}a,$$

$$\int_0^1 P_\theta(X_1=0)\xi_{ab}(\mathrm{d}\theta) = (a+b)^{-1}b,$$

于是

$$\lambda(\xi_{ab}) = \frac{K}{2}\left\{\left|\frac{a+1}{a+1+b}-\theta_0\right|\frac{a}{a+b}+\left|\frac{a}{a+1+b}-\theta_0\right|\cdot\frac{b}{a+b}-\left|\frac{a}{a+b}-\theta_0\right|\right\}.$$

令

$$\Gamma_0 = \left\{(a,b): \frac{a}{a+b}=\theta_0, a>0, b>0\right\},$$

$$\Gamma_1 = \left\{(a,b): \frac{a}{a+b}<\theta_0<\frac{a+1}{a+b+1}, a>0, b>0\right\},$$

$$\Gamma_2 = \left\{(a,b): \frac{a}{a+b+1}<\theta_0<\frac{a}{a+b}, a>0, b>0\right\}.$$

经过计算得到

$$\lambda(\xi_{ab}) = \begin{cases} \dfrac{Kab}{(a+b)^2(a+b+1)}, & \text{当}(a,b)\in\Gamma_0, \\ \dfrac{Ka}{a+b}\left(\dfrac{a+1}{a+b+1}-\theta_0\right), & \text{当}(a,b)\in\Gamma_1, \\ \dfrac{Kb}{a+b}\left(\theta_0-\dfrac{a}{a+b+1}\right), & \text{当}(a,b)\in\Gamma_2, \\ 0, & \text{其它情形。} \end{cases}$$

可以证明

$$\lambda(\tau_{n v_n}\xi) \leqslant \frac{K\theta_0(1-\theta_0)}{a_0+b_0+n+1}.$$

令

$$n_0 = \inf\left\{n: \ n \geqslant 1, \frac{K\theta_0(1-\theta_0)}{a_0+b_0+n+1} \leqslant C\right\}$$

$$= \inf\left\{n: \ n \geqslant 1, n \geqslant \frac{1}{C}K\theta_0(1-\theta_0) - a_0 - b_0 - 1\right\}.$$

从定理 5.1 知，对于先验分布 $\xi = \beta(a_0, b_0)$，有贝叶斯停时 $\tau^* \leqslant n_0$ (a.s.P_ξ)。特别，当 $\theta_0 = \frac{1}{2}$，$a_0 = b_0$ 时，n_0 是不小于 $\frac{K}{4C} - 2a_0 - 1$ 的最小整数。

大家知道，在使用贝叶斯方法时最感困难的是如何确定先验分布，好的方法应该体现在：先验分布的稍许变化对结论无显著影响。换句话说，对先验分布的依赖性不应太大。近年来，一些文章在对先验分布施加极少限制的条件下，探讨了贝叶斯停时何时有界。R.H.Berk，L.D. Brown 和 Arthur Cohen (1981) 对单参数指数族分布证明了下列有意义的结论。设损失函数如下：

$$\begin{aligned} L(\theta, a_1) &= w_1 I_{(\theta_0, \infty)}(\theta), \\ L(\theta, a_2) &= w_2 I_{(-\infty, \theta_0]}(\theta), \end{aligned} \tag{5.11}$$

这里 a_1 表示"接受假设 H_1: $\theta \leqslant \theta_0$"，$a_2$ 表示"接受假设 H_2: $\theta > \theta_0$"，w_1, w_2 是正数。如果先验分布 ξ 满足：对一切 $\delta > 0$，

$$\xi([\theta_0, \theta_0 + \delta)) > 0, \quad \xi((\theta_0 - \delta, \theta_0]) > 0,$$

则贝叶斯停时是有界的。

Cohen 和 Samuel-cahn (1983)进一步研究了这个问题，他们在损失函数满足(5.11)而且总体的分布对 Lebesgue 测度绝对连续的情况下，给出了贝叶斯停时有界的充要条件，现介绍他们的结果如下：

设 $X_1, X_2, \cdots$是相互独立同分布的随机变量列，X_1 的分布函数是 $F(x, \theta)$，密度函数是

$$f(x,\theta)=\exp\{\theta x-\psi(\theta)\}\text{（关于测度 }\mu\text{）},$$

这里 μ 对 Lebesgue 测度绝对连续，$\theta\in\Theta=\langle a,b\rangle$。$\theta_0$ 是 Θ 的内点。考虑检验问题：

$$H_1:\ \theta\leqslant\theta_0\longleftrightarrow H_2:\ \theta>\theta_0.$$

设单次观测的费用是 C（正数）。先验分布 ξ 满足：

$$\xi(\theta:\ \theta\leqslant\theta_0)>0,\quad \xi(\theta:\ \theta>\theta_0)>0.$$

令，

$$\theta_1=\sup\{\theta:\ \theta\leqslant\theta_0,\ \text{对一切 }\varepsilon>0,\xi((\theta-\varepsilon,\theta])>0\},$$

$$\theta_2=\inf\{\theta:\ \theta>\theta_0,\ \text{对一切 }\varepsilon>0,\xi((\theta,\theta+\varepsilon))>0\},$$

$$\eta=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta_2-\theta_1}[\psi(\theta_2)-\psi(\theta_1)], & \text{当 }\theta_1\neq\theta_2;\\ \psi'(\theta_0), & \text{当 }\theta_1=\theta_2,\end{cases}$$

$$g(\theta_1,\theta_2)=\frac{w_1w_2}{w_1+w_2}[F(\eta,\theta_1)-F(\eta,\theta_2)].$$

Cohen 和 Samuel-cahn 的主要结论是：为了针对先验分布 ξ 的贝叶斯停时有界，必须且只须 $g(\theta_1,\theta_2)<C$ 成立或者 $g(\theta_1,\theta_2)=C$ 但是 $\xi(\{\theta_1,\theta_2\})=1$。

他们还对更一般的损失函数给出了保证贝叶斯停时有界的充分条件。

§6 补充与习题

(1) 地质学家要根据某地区的地层结构来判断该地是否蕴藏石油。地层结构总是 0，1 两种状态之一。用 θ_0 表示该地无油，θ_1 表示该地有油。已知有下列分布规律（其中 x 表示地层结构的状态，θ 表示石油的状态）：

如果该地区蕴藏石油，那么地层结构呈现状态 0 的概率为 0.3，呈现状态 1 的概率为 0.7；如果该地区不蕴藏石油，那么地层呈现状态 0 的概率为 0.6，呈现状态 1 的概率为 0.4。土地

θ \ x	0	1
θ_0(无油)	0.6	0.4
θ_1(有油)	0.3	0.7

所有者希望根据地质学家对地层结构的分析决定自己投资钻探石油、还是出卖土地所有权、或者在该地区开辟旅游点，分别记这些行动为 a_1,a_2,a_3，于是行动空间为

$$A=\{a_1,a_2,a_3\}.$$

土地所有者权衡利害之后取损失函数 $L(\theta,a)$ 如下：

$L(\theta,a)$ \ a	a_1 (自己投资钻探)	a_2 (出卖所有权)	a_3 (开辟旅游点)
θ_0(无油)	12	1	6
θ_1(有油)	0	7	5

试写出可供土地所有者选择的全部判决法则(决策函数)及其风险。若 θ 的先验分布是 $\xi(\theta_0)=0.2$，$\xi(\theta_1)=0.8$，试求出贝叶斯判决法则。

(2) 设 $E(X)^2<\infty$，试证明：为了 $E(X-a)^2$ 达到最小值，必须且只须 $a=EX$.

(3) 设 $E|X|<\infty$. 试证明：为了 $E|X-a|$ 达到最小值，必须且只须 a 是X的中位数.

(4) 设 $x_1,x_2,\cdots$是独立同分布随机变量列，且

$$P(x_1=K)=\frac{1}{K!}\lambda^K e^{-\lambda}\quad(K=0,1,\cdots),$$

λ 是未知参数，$\lambda\in(0,\infty)$.

设 λ 的先验分布密度为

$$g_{\alpha\beta}(\lambda)=\begin{cases}0, & \lambda\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\alpha^{\beta}\lambda^{\beta-1}e^{-\alpha\lambda}, & \lambda>0,\end{cases}$$

其中 $\alpha>0$，$\beta>0$.

用 $\hat{\lambda}$ 估计 λ 时的损失为

$$\frac{(\hat{\lambda}-\lambda)^2}{\lambda}.$$

又单次观测的费用为 $C>0$.

试求出 λ 的贝叶斯序贯估计。

(5) 设寿命 X 的分布函数是 $F_1(x)$ 或 $F_2(x)$，到底是哪一个？不知道. 需要利用数据来处理检验问题：

H_1:F_1 是真正的分布函数 $\longleftrightarrow H_2$:F_2 是真正的分布函数。

我们考虑时间序贯检验法。随机抽取 n 个"产品"同时开始进行"寿命试验"，这 n 个"产品"的寿命分别是 $x_1,\cdots,x_n$，它们是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P_\theta)$ $(\theta=1,2)$上独立同分布的随机变量，在 P_θ 下 x_i 的分布函数是 $F_\theta(x)$。在时刻 t 能观测到的是

$$\left.\begin{aligned}y_i(t)&=\min(x_i,t),\\ \delta_i(t)&=I(x_i\leqslant t),\end{aligned}\right\}\quad i=1,\cdots,n.$$

令

$$\xi(t)=(y_1(t),\delta_1(t),y_2(t),\delta_2(t),\cdots,y_n(t),\delta_n(t)),$$

$$\mathscr{F}_t=\sigma(\xi(s),0\leqslant s\leqslant t)\quad(t\geqslant 0).$$

我们假设$(\Omega,\mathscr{F},P_\theta)(\theta=1,2)$ 是完全的概率空间，θ 取值 1 的概率为 π，θ 取值 2 的概率为 $1-\pi$ $(0<\pi<1)$.

考虑概率测度

$$P=\pi P_1+(1-\pi)P_2.$$

设$\mathscr{N}$由 P 的全体零测集组成。令

$$\widetilde{\mathscr{F}}_t=\mathscr{F}_t\vee\mathscr{N}\ \text{（包含}\mathscr{F}_t\text{及}\mathscr{N}\text{的最小 }\sigma\text{ 代数）}.$$

可以证明，σ 代数流$\{\widetilde{\mathscr{F}}_t,t\geqslant 0\}$满足"通常条件"（通常条件的含义见第一章 § 10）。

设损失函数为

$$L(\theta,d)=\begin{cases}0, & \theta=1, d=1,\\ 0, & \theta=2, d=2,\\ w_0, & \theta=1, d=2,\\ w_1, & \theta=2, d=1,\end{cases}$$

这里 w_0, w_1 是已知的正数。又单位时间的观测费用为 C（正数）。

序贯检验法为 $\Delta=(\tau,d)$，其中 τ 是 $\{\widetilde{\mathscr{F}}_t, t\geqslant 0\}$ 的停时，d 是 $(\Omega_\tau, \widetilde{\mathscr{F}}_\tau)$ 到 $\{1,2\}$ 的可测映射，这里

$$\Omega_\tau=\{\tau<\infty\},$$

$$\widetilde{\mathscr{F}}_\tau=\{A:\ 对一切\ t\geqslant 0, A\cap\{\tau\leqslant t\}\in\widetilde{\mathscr{F}}_t\},$$

$d=2$ 表示拒绝 H_1，$d=1$ 表示接受 H_1。

不难看出，Δ 的总风险为

$$\rho(\Delta)=E(C\tau)+w_0\pi P_1(d=2)+w_1(1-\pi)P_2(d=1).$$

问：是否有 $\Delta=(\tau,d)$，使得 $\rho(\Delta)$ 达到最小值？即贝叶斯序贯检验是否存在？

把 θ 看成随机变量时，常用记号 $\tilde{\theta}$ 代替 θ，假设 $F_\theta(x)$ 有密度函数 $f_\theta(x)$ $(\theta=1,2)$。可以证明

$$\Pi_t\triangleq P(\tilde{\theta}=1|\widetilde{\mathscr{F}}_t)=\frac{1}{1+\dfrac{1-\pi}{\pi}L_t},$$

其中

$$L_t=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{f_2(x_i)}{f_1(x_i)}\right)^{I(x_i<t)}\cdot\left(\frac{1-F_2(t)}{1-F_1(t)}\right)^{I(x_i>t)}.$$

对给定的停时 τ，令

$$d^*=\begin{cases}1, & 当\ \pi_\tau\geqslant\dfrac{w_1}{w_0+w_1},\\ 2, & 当\ \pi_\tau<\dfrac{w_1}{w_0+w_1},\end{cases}$$

$$\Delta^*=(\tau,d^*).$$

可以证明

$$\rho(\Delta)\geqslant\rho(\Delta^*),$$
$$\rho(\Delta^*)=EZ_{\tau},$$

其中

$$Z_t=\min(w_0\pi_t,w_1(1-\pi_t))+Ct.$$

是否有停时 τ^*，使得

$$EZ_{\tau^*}=\inf\{EZ_\tau:\tau\text{ 是停时}\}?$$

这就是最优停止问题.刘力平(1991)证明了这样的 τ^* 是存在的;令

$$d^*=\begin{cases}1, & \text{当 } \pi_{\tau^*}\geqslant\dfrac{w_1}{w_0+w_1},\\[2ex] 2, & \text{当 } \pi_{\tau^*}<\dfrac{w_1}{w_0+w_1},\end{cases}$$

则 (τ^*,d^*) 便是贝叶斯序贯检验.

(6) 我们介绍实际工作中关心的"变点问题". 研究独立的随机变量列 $x_1,x_2,\cdots,x_{\theta-1},x_\theta,x_{\theta+1},\cdots$，其中 $x_1,\cdots,x_{\theta-1}$ 服从相同的分布 $F_0(x)$，$x_\theta,x_{\theta+1},\cdots$ 服从相同的分布 $F_1(x)$，F_0 与 F_1 是已知的且 $F_0\neq F_1$，θ 是未知的非负整数. 问：如何根据逐次观测值 $x_1,x_2,\cdots$ 估计 θ?

设 θ 以几何分布为先验分布，即

$$P(\tilde\theta=j)=\begin{cases}\pi, & j=0,\\ (1-\pi)p(1-p)^{j-1}, & j\geqslant1\end{cases}$$

(当 θ 看成随机变量时，用 $\tilde\theta$ 表示)，其中 $0<\pi<1$，$0<p<1$.

记 $x_0=0$，

$$\mathscr{F}_n=\sigma(\tilde\theta,x_0,x_1,\cdots,x_n)\quad(n\geqslant0).$$

设 τ 是 $\{\mathscr{F}_n,n\geqslant0\}$ 的停时 $(0\leqslant\tau\leqslant\infty)$，我们可用 τ 作为 θ 的估计量.

给定 $C>0$，令

$$R_0(\tau)=P(\tau<\tilde\theta)+CP(\tau\geqslant\tilde\theta)E(\tau-\tilde\theta\mid\tau\geqslant\tilde\theta),$$

这个 $R_0(\tau)$表示采用 τ 估计 $\tilde{\theta}$ 引起的风险.

我们希望找到停时 τ，使得 $R_0(\tau)$达到最小值(这样的 τ 叫做最优的).

令

$$\Pi_n = P(\tilde{\theta} \leqslant n \mid \mathscr{F}_n) \quad (n \geqslant 0).$$

若 $F_i(x)$有密度函数 $f_i(x)$ $(i=0,1)$，且

$$R(x) = f_1(x)/f_0(x),$$

可以证明

$$\pi_n = \frac{\frac{\pi}{1-\pi}\prod_1^n R(x_i) + p\sum_{j=0}^{n-1}(1-p)^j \prod_{i=j+1}^{n} R(x_i)}{\frac{\pi}{1-\pi}\prod_1^n R(x_i) + p\sum_{j=0}^{n-1}(1-p)^j \prod_{i=j+1}^{n} R(x_i) + (1-p)^n},$$

而且存在 $A^* \in (0,1)$，使得

$$\tau^* = \inf\{n;\ n \geqslant 0, \pi_n \geqslant A^*\}$$

是最优的. 这是 ШИРЯЕВ (1976)的结果，参看 Ghosh and Sen (1991)的第 23 章.

第五章 序贯选择

§1 引言、(p^*,Δ^*)模型

在日常生活、科学实验及技术过程中常遇到选择问题．如，在$k(k\geqslant 2)$个物品中，如何选择其中"最好"的？在几个可供选择的行动中应该选择哪一个"最有利"？请看以下例子．

例1.1 设$\Pi_1,\Pi_2,\cdots,\Pi_k$是k个贝努里总体，Π_i的参数是p_i（即Π_i是取值0,1的随机变量．p_i是取值等于1的概率），$i=1,\cdots,k$．这些p_i是未知的．如何安排试验，从$\Pi_1,\Pi_2,\cdots,\Pi_k$的观察值找出参数最大的总体？

例1.2 在医学临床试验中，有k种未知效力的药要施于一列病人（同一种病），在每一步，对一个病人施用何种药应该依赖于到目前为止得到的信息及病人的反应情况，应该尽量快地确定出哪一种药效果最好而且应该让效力最大的药（虽然不知道哪一种药效力最大）使用次数最多．应如何安排试验？

例1.3 设有k个$(k\geqslant 2)$可以按任何次序重复拉动的"拉手"，每拉一次要花费一个单位时间，并且每次只能拉一个"拉手"．拉的结果是成功或失败．拉第i个拉手取得成功的概率是$p_i(i=1,\cdots,k)$．在时刻t成功的报酬是$a^t(0<a<1)$，失败的报酬是0．这些p_i是未知的，但在开始时$(t=0)$，p_i服从β分布（参数是α_i,β_i）并且这些p_i是相互独立的．问题是要在每一步决定拉哪一个"拉手"，以使得不断拉下去（无穷尽）得到的全部报酬（平均值）达到最大．

选择问题的例子多得很，类型也多种多样，很难建立一个统一的模式以处理各种问题，只能分门别类逐类加以研究．限于篇

等，本章只研究几种受到人们广泛注意的模型：

1 $(p^*; \Delta^*)$模型——从 k 个总体中挑选均值最大的总体；

2 平均模型——Multi armed bandit 问题；

3 马尔可夫折扣决策模型；

4 备择 bandit 过程。

本节研究$(p^*; \Delta^*)$模型。

设 $\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_k$ 是 k 个一维的统计总体($k \geqslant 2$)。Π_j 的分布函数是 $F(x, \theta_j)$，其中参数 $\theta_j \in \Theta$ $(j=1, \cdots, k)$，这里 Θ 是 m 维欧氏空间中某个已知的 Borel 集。假设从每个总体进行的观测和不同总体进行的观测是彼此相互独立的，而且

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \mathrm{d}F(x, \theta) < \infty \quad (\theta \in \Theta).$$

我们应如何序贯地从这 k 个总体中抽样并在适当的时候停止抽样后有足够的把握找出均值最大的总体？

所谓一个“选择方法”，是指三元集(φ, τ, T)，其中 φ 是抽样法则，指示每一步应对哪一个总体进行试验(或抽样、观察)；τ 是停止法则，决定何时停止试验(抽样、观察)；T是终止判决法则，停止试验后指出哪一个(或哪些)总体是“最好的”(即均值最大的)。更确切的定义如下：

设

$$\Omega = \boldsymbol{R}^\infty = \{\omega: \omega = (\omega_{11}, \omega_{21}, \cdots, \omega_{k1}, \omega_{12}, \omega_{22}, \cdots, \omega_{k2}, \cdots), \\ \omega_{ji} \in \boldsymbol{R}, j=1, \cdots, k, i \geqslant 1\},$$

这里 $\boldsymbol{R} = (-\infty, \infty)$。令

$$x_{ji}(\omega) = \omega_{ji} \qquad (i \geqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant k).$$

$\mathscr{F}$ 是 Ω 中通常的柱集产生的 σ 代数。对任何

$$\underline{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_k) \in \Theta^k,$$

在 $\mathscr{F}$ 上定义概率测度 $P_{\underline{\theta}}$ 满足：对任何 $a_{ji} \leqslant b_{ji}$ $(i=1, \cdots, n;$ $j=1, \cdots, k)$，

$$P_{\underline{\theta}}\{\omega: x_{ji}(\omega)\in(a_{ji},b_{ji}],\ i=1,\cdots,n,j=1,\cdots,k\}$$
$$=\prod_{j=1}^{k}\prod_{i=1}^{n}[F(b_{ji},\theta_j)-F(a_{ji},\theta_j)],$$

其中 $F(x,\theta_j)$是 Π_j 的分布函数 $(j=1,\cdots,k)$. 从 Tulcea 定理知，满足上述条件的 $P_{\underline{\theta}}$ 恰有一个。显然，随机变量族
$$\{x_{ji}:\ j=1,\cdots,k,i\geqslant 1\}$$
在 $P_{\underline{\theta}}$ 下是相互独立的，$x_{j1},x_{j2},\cdots$ 可看成是来自总体 Π_j 的随机变量列$(j=1,\cdots,k)$。

定义 1.1 称 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots)$是抽样法则，若 φ_n 是 Ω 到$\{1,2,\cdots,k\}$的映射$(n\geqslant 1)$，φ_1 恒等于常数，对一切 $n\geqslant 2$，φ_n 关于 σ 代数 $\sigma(\varphi_1,y_1,\cdots,\varphi_{n-1},y_{n-1})$可测，其中 y_i 是第 i 次观测值，取自总体 Π_{φ_i}，即
$$y_i=x_{\varphi_i,T_i(\varphi_i)}\ (i\geqslant 1),\tag{1.1}$$
这里
$$T_n(j)=\sum_{i=1}^{n}I_{(\varphi_i=j)}.\tag{1.2}$$

$T_n(j)$ 的直观意义是：到第 n 步为止从总体 Π_j 中抽样的次数。

注：我们还可以定义随机化的抽样法则，即
$$\varphi_n=\varphi_n(\varphi_1,y_1,\cdots,\varphi_{n-1},y_{n-1},\cdot).$$
它是$\{1,2,\cdots,k\}$的所有子集上的概率测度.随机化方法使用不便，我们只考虑非随机化的法则，但第一步允许随机化，即 φ_1取值等于 i 的概率是$\frac{1}{k}$ $(i=1,2,\cdots,k)$。

定义 1.2 设
$$\mathscr{F}_n=\sigma\{\varphi_1,y_1,\cdots,\varphi_n,y_n\}\ (n\geqslant 1),$$
关于 σ 代数流 $\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$的停时$\tau$叫做停止法则。

注意停时可能取无穷值。令
$$\Omega_\tau=\{\tau<\infty\},$$
$$\mathscr{F}_\tau=\{B:\ B\subset\Omega_\tau,\ 对一切\ n\geqslant 1,\ B\cap\{\tau=n\}\in\mathscr{F}_n\}.$$

定义1.5 称$(\Omega,\mathscr{F})$上取值于$\{1,2,\cdots,k\}$的可测映射$T=T(\omega)$为终止判决法则。

终止判决法则T的意义是：选取Π_T作为最好（即均值最大）的总体。

记 $\mu_j=\mu(\theta_j)=\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}F(x,\theta_j)$. 设$\mu_{[1]}\leqslant\mu_{[2]}\leqslant\cdots\leqslant\mu_{[k]}$是$\mu_1,\cdots,\mu_k$的从小到大的排列。给定正数$\Delta^*$及$p^*\left(p^*\in\left(\frac{1}{k},1\right)\right)$. 令

$$H=\{(\theta_1,\cdots,\theta_k):\mu_{[k]}-\mu_{[k-1]}\geqslant\Delta^*\}.$$

我们希望找到选择方法(φ,τ,T)满足：

$$\inf_{\theta\in H}P_\theta(\mu_T=\mu_{[k]})\geqslant p^*, \tag{1.3}$$

而且希望在均值不是最大的总体中抽样次数尽量小。

通常用CS表示事件$\{\omega:\mu_T=\mu_{[k]}\}$，(1.3)可改写为

$$\inf_{\theta\in H}P_\theta(\mathrm{CS})\geqslant p^*, \tag{1.4}$$

即正确选择的概率不小于p^*。

(1.4)通常叫做(p^*,Δ^*)条件。选择问题的这种提法叫做(p^*,Δ^*)模型。对于这个模型，现代有大量研究，文献很多，可参看Bechhofer、R.E.(1954)，Gupta, S.S.和Panchapakesan, S.(1979)及Büringer et al.(1980)。

我们下面只讨论一个典型情况：$k=2$而Π_1,Π_2是两个贝努里总体，参数分别是$p_1,p_2(0<p_i<1,\ i=1,2)$。此时可把上面建立的空间Ω加以缩小，取$\Omega=\{0,1\}^\infty$. $\mathscr{F}$是Ω中柱集生成的σ代数。$P_\theta=P_{(p_1,p_2)}$的定义和上面定义的相似。随机变量$x_{ji}(\omega)$的定义也和上面的一样。要注意的是，$x_{ji}(\omega)$取值等于0或1，而且

$$P_{(p_1,p_2)}(x_{ji}=1)=p_j\quad(j=1,2)$$

我们来寻找满足(p^*, Δ^*)条件而且平均样本量小的选择方法.

抽样法则的范围太广了，对于上述贝努里总体的情形，最直观而且很常用的抽样法则是 PW 法则、VT 法则和 PL 法则。

定义1.4 称 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots)$为PW法则 (Play winner rule)，若对一切$i>1$,

$$\varphi_i=\begin{cases}\varphi_{i-1}, & \text{当第 } i-1 \text{ 次观测值 } y_{i-1}=1,\\ 3-\varphi_{i-1} & \text{当} y_{i-1}=0.\end{cases}$$

换句话说，PW 法则是：若在某个总体上观测得观测值1，则下一步仍在这个总体上观测；若观测值是0，则下一步换另一个总体进行观测。

定义1.5 称 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots)$为 VT 法则 (即所谓齐进法则)，若

$$\varphi_i=\begin{cases}1, & \text{当 } i \text{ 是奇数},\\ 2, & \text{当 } i \text{ 是偶数}\end{cases} \quad (i\geqslant 1).$$

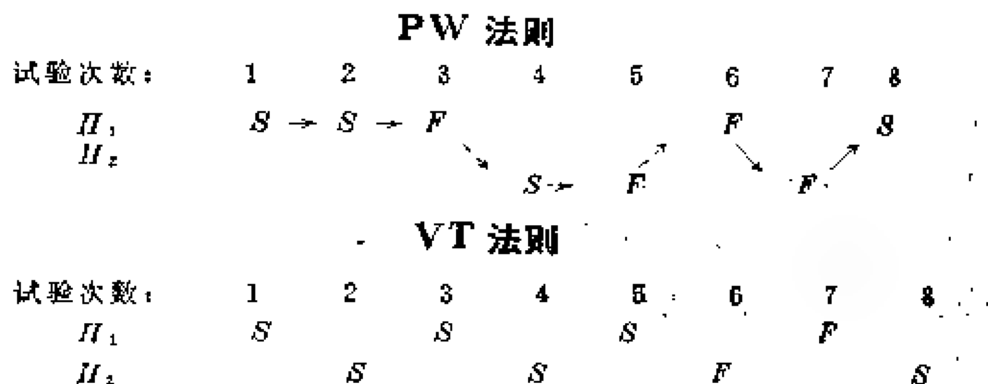
这个法则可理解为：每次同时从 Π_1, Π_2 中各观测一次。

定义1.6 称 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots)$ 为 PL 法则，若对一切 $i>1$,

$$\varphi_i=\begin{cases}3-\varphi_{i-1}, & \text{当第 } i-1 \text{次观测值 } y_{i-1}=1,\\ \varphi_{i-1}, & \text{当} y_{i-1}=0.\end{cases}$$

PL 法则在临床试验中常引起伦理上的争论：既然用一种药医死了一个病人，下一次怎么还可以使用同一种药呢？但从深入的研究知道，这种法则有时很有好处。

三种法则可用图来表示，其中 S 表示“成功”，即观测值为1，F 表示“失败”，即观测值为0。



PL 法则

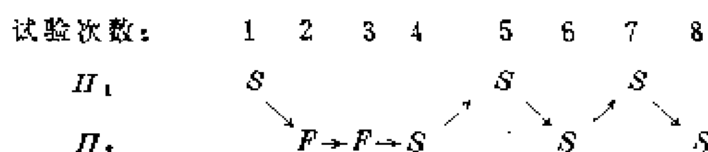


图 1.1

以上介绍了常用的抽样法则。常用的停止法则类型较多。令

$$S_j(n)=\sum_{i=1}^{n}I_{\{y_i=1,\varphi_i=j\}},$$

$$F_j(n)=\sum_{i=1}^{n}I_{\{y_i=0,\varphi_i=j\}},$$

其中 $j=1,2$,

$$R_1(n)=S_1(n)+F_2(n),$$
$$R_2(n)=S_2(n)+F_1(n).$$

这些量的直观意义是：$S_j(n)(F_j(n))$是到 n 步为止从总体 Π_j 中抽样(观测)而且结果为"成功"（"失败"）的次数；$R_j(n)$ 乃是到 n 步为止从总体 Π_j 中抽样而且结果为"成功"的次数加上从总体 Π_{3-j} 中抽样且结果为"失败"的次数。设r,C是正整数，令

$$\tau_1=\inf\{n:\ |S_1(n)-S_2(n)|=r\}. \tag{1.5}$$

这个 τ_1 就是一个常用的停止法则。这个停止法则常用符号 $|S_1-S_2|=r$ 来表示。类似地，用$|F_1-F_2|=r$ 表示停止法则

$$\tau_2=\inf\{n:\ |F_1(n)-F_2(n)|=r\},$$

用"$\max(S_1,S_2)=r$ 或 $\min(F_1,F_2)=C$" 表示停止法则

$$\tau_3=\inf\{n:\ \max(S_1(n),\ S_2(n))=r \text{ 或 } \min(F_1(n),F_2(n))=C\},$$

等等（即用一个事件的记号表示该事件首次发生的时刻）。

终止判决法则的类型较少，主要是三个。

S型：

$$T=\begin{cases}1, & \text{当 } S_1(\tau)\geqslant S_2(\tau)\text{①},\\ 2, & \text{当 } S_1(\tau)<S_2(\tau),\end{cases}$$

这里 τ 是停止法则，下同。

F型：

$$T=\begin{cases}1, & \text{当 } F_1(\tau)\leqslant F_2(\tau),\\ 2, & \text{当 } F_1(\tau)>F_2(\tau).\end{cases}$$

R型：

$$T=\begin{cases}1, & \text{当 } R_1(\tau)\geqslant R_2(\tau),\\ 2, & \text{当 } R_1(\tau)<R_2(\tau).\end{cases}$$

每个选择方法是个三元集。记号 $(\mathrm{PW},\ |S_1-S_2|=r,\ S)$ 表示这样的选择方法：抽样法则是 PW，停止法则是 $|S_1-S_2|=r$，即由（1.5）确定的停时，终止判决法则是 S 型。记号 $(\mathrm{PL},\ \max(F_1,F_2)=r, F)$ 的含义是类似的。很明显，可以得到许多种选择方法，我们希望找出较好的选择方法。"好"的标准起码应该包括两条：一是满足 (p^*,Δ^*) 条件，另一是平均抽样量小而且从不利总体（即参数小的贝努里总体）中的平均抽样量也小。

我们指出，只要 r 选得适当，方法

$$\mathscr{P}_1=(\mathrm{PW},\ |S_1-S_2|=r,\ S)$$

就满足 (p^*,Δ^*) 条件。推导较长，所用的方法可用于研究其它的选择方法。以下的讨论都是关于 $\mathscr{P}_1$ 而言的，$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots)$ 是 PW 法则，停止法则 τ_1 由（1.5）确定，T 是 S 型终止判决法则。

令

$$\xi_n=S_1(n)-S_2(n)\quad(n\geqslant 1),$$
$$S_1(0)\triangleq S_2(0)\triangleq 0,\ \xi_0\triangleq 0,$$
$$\underline{\theta}=(p_1,p_2).$$

不难看出

① 在实用上，考虑随机化较好，当 $S_1(\tau)=S_2(\tau)$ 时，T 以概率 $\frac{1}{2}$ 取 1，以概率 $\frac{1}{2}$ 取2.

$$P_{\underline{\theta}}(\mathrm{CS})=\begin{cases}P_{\underline{\theta}}(\tau_1<\infty,\ \xi_{\tau_1}>0), & \text{当} p_1\geqslant p_2,\\ P_{\underline{\theta}}(\tau_1<\infty,\ \xi_{\tau_1}<0), & \text{当} p_1<p_2.\end{cases}$$

为了计算这个概率，先证明几个引理。

引理1.1 在测度 $P_{\underline{\theta}}$ 下，$\{(\xi_n,\ \varphi_{n+1}):\ n\geqslant 0\}$ 是齐次马尔可夫链。

证明 令 $\delta(u,v)=1$（当 $u=v$ 时），$\delta(u,v)=0$（当 $u\neq v$ 时）。易知有下列等式：

$$P_{\underline{\theta}}\{\xi_{n+1}=l,\varphi_{n+2}=1\,|\,\xi_1=i_1,\varphi_2=u_1,\cdots,\xi_n=i_n,\varphi_{n+1}=1\}$$

$$=p_1\delta(l,i_n+1),$$

$$P_{\underline{\theta}}\{\xi_{n+1}=l,\varphi_{n+2}=2\,|\,\xi_1=i_1,\varphi_2=u_1,\cdots,\xi_n=i_n,\varphi_{n+1}=1\}$$

$$=q_1\delta(l,i_n).$$

$$P_{\underline{\theta}}\{\xi_{n+1}=l,\varphi_{n+2}=1\,|\,\xi_1=i_1,\varphi_2=u_1,\cdots,\xi_n=i_n,\ \varphi_{n+1}=2\}$$

$$=q_2\delta(l,i_n),$$

$$P_{\underline{\theta}}\{\xi_{n+1}=l,\ \varphi_{n+2}=2\,|\,\xi_1=i_1,\varphi_2=u_1,\cdots,\xi_n=i_n,\varphi_{n+1}=2\}$$

$$=p_2\delta(l,i_n-1).$$

由此可见，$\{(\xi_n,\varphi_{n+1}):\ n\geqslant 0\}$ 是齐次马氏链。证毕。

以下简写 $P_{\underline{\theta}}$ 为P。设 $p_1>p_2$。给定整数 $n(|n|\leqslant r)$，令

$$P_n=P(\tau_1<\infty,\xi_{\tau_1}>0\,|\,\xi_i=n,\tau_1\geqslant i,\varphi_{i+1}=1),$$

$$Q_n=P(\tau_1<\infty,\xi_{\tau_1}>0\,|\,\xi_i=n,\tau_1\geqslant i,\varphi_{i+1}=2).$$

由于

$$\begin{aligned}P_n&=P\,(\text{存在 } k\geqslant 0 \text{ 使得} |\xi_{i+1}|\neq r,\cdots,|\xi_{i+k-1}|\\&\qquad\neq r,\xi_{i+k}=r\,|\,\xi_i=n,\varphi_{i+1}=1,\tau_1\geqslant i)\\&=P(\text{存在 } k\geqslant 0 \text{ 使得} |\xi_{i+1}|\neq r,\cdots,|\xi_{i+k-1}|\neq r,\\&\qquad\xi_{i+k}=r\,|\,\xi_i=n,\varphi_{i+1}=1),\end{aligned}$$

从引理1.1知 P_n 与 i 无关，同理 Q_n 也与 i 无关。

引理1.2 对一切 $-r+1\leqslant n\leqslant r-1$，有

$$P_n = p_1 P_{n+1} + q_1 Q_n \tag{1.6}$$

$$Q_n = p_2 Q_{n-1} + q_2 P_n, \tag{1.7}$$

这里 $q_i = 1 - p_i$ $(i=1,2)$。

证明

$$P_n = P\{\tau_1 < \infty, \zeta_{\tau_1} > 0, x_{1\tau_1(i)+1} = 1 \mid \zeta_i = n, \tau_1 \geqslant i, \varphi_{i+1} = 1\} + P\{\tau_1 < \infty, \zeta_{\tau_1} > 0,$$

$$x_{1\tau_1(i)+1} = 0 \mid \zeta_i = n, \tau_1 \geqslant i, \varphi_{i+1} = 1\}$$

$$= p_1 P\{\tau_1 < \infty, \zeta_{\tau_1} > 0 \mid \zeta_{i+1} = n+1, \tau_1 \geqslant i, \varphi_{i+2} = 1\}$$

$$+ q_1 P\{\tau_1 < \infty, \zeta_{\tau_1} > 0 \mid \zeta_{i+1} = n, \tau_1 \geqslant i+1, \varphi_{i+2} = 2\}$$

$$= p_1 P_{n+1} + q_1 Q_n.$$

这就证明了(1.6)成立。同理知（1.7）也成立。证毕。

固定 $-r+2 \leqslant n \leqslant r-1$，从(1.6)和(1.7)推出

$$p_1 P_{n+1} - (p_1 + p_2) P_n + p_2 P_{n-1} = 0.$$

这个差分方程的特征方程为

$$p_1 x^2 - (p_1 + p_2) x + p_2 = 0,$$

其根为 $x_1 = 1$，$x_2 = \frac{p_2}{p_1}$。以下记 $\lambda = \frac{p_2}{p_1}$。于是有

$$P_n = C_1 + C_2 \lambda^n,$$

其中 C_1, C_2 是待定的常数。从定义知

$$P_r = 1,\quad Q_{-r} = 0.$$

于是可求出

$$C_1 = \frac{q_2}{q_2 - q_1 \lambda^{2r}}, \qquad C_2 = \frac{-q_1 \lambda^r}{q_2 - q_1 \lambda^{2r}},$$

$$P_n = \frac{q_2 - q_1 \lambda^{n-r}}{q_2 - q_1 \lambda^{2r}} \quad (-r+2 \leqslant n \leqslant r-1),$$

$$Q_n = \frac{q_2 - q_2 \lambda^{n+r}}{q_2 - q_1 \lambda^{2r}} \quad (-r+2 \leqslant n \leqslant r-1).$$

从（1.6）和（1.7）可以证明，当 $n = -r+1$ 时，上述 P_n, Q_n 的

表达式仍是正确的。

我们假定开始时是以概率 $\frac{1}{2}$ 从 Π_1 中抽样，则

$$P_{(p_1,p_2)}(\tau_1<\infty,\xi_{\tau_1}>0)=\frac{1}{2}(P_0+Q_0)$$

$$=\frac{2q_2-(q_1+q_2)\lambda^r}{2(q_2-q_1\lambda^{2r})}$$

故 $p_1>p_2$ 时，

$$P_{(p_1,p_2)}(\mathrm{CS})=\frac{2q_2-(q_1+q_2)\lambda^r}{2(q_2-q_1\lambda^{2r})}.$$

用同样的方法可得，$p_1<p_2$ 时，

$$P_{(p_1,p_2)}(\mathrm{CS})=\frac{(q_1+q_2)\lambda^r-2q_1\lambda^{2r}}{2(q_2-q_1\lambda^{2r})}.$$

这里 $\lambda=\frac{p_2}{p_1}$。

给定 $p^*\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，我们来选 r 使得

$$P(\mathrm{CS})\geqslant p^*. \tag{1.8}$$

令

$$\Delta=|p_1-p_2|,\qquad x=1-\frac{1}{2}(p_1+p_2).$$

不难推知(1.8)成立的条件是

$$r\geqslant\frac{\ln\{[x+\sqrt{x^2-(4x^2-\Delta^2)p^*(1-p^*)}]/[(1-p^*)(2x+\Delta)]\}}{\ln\left(1+\dfrac{\Delta}{1-x-\frac{1}{2}\Delta}\right)}.$$

记这个不等式的右端为 $f(x,\Delta)$。从 (p^*,Δ^*) 条件知 r 应满足下

式：

$$r \geqslant \sup\left\{f(x,\Delta);\Delta \geqslant \Delta^*, \frac{1}{2}\Delta \leqslant x \leqslant 1-\frac{1}{2}\Delta\right\}.$$

固定 x 时，易知 $f(x,\Delta)$ 是 Δ 的减函数，故 r 应满足不等式：

$$r \geqslant \sup\left\{f(x,\Delta^*): \frac{1}{2}\Delta^* \leqslant x \leqslant 1-\frac{1}{2}\Delta^*\right\}. \qquad (1.9)$$

$f(x,\Delta^*)$ 的表达式比较复杂．当 $p^* \approx 1$ 时，有下列近似式

$$f(x,\Delta^*) \doteq \frac{\ln\left[(1-p^*)\left(1+\frac{\Delta^*}{2x}\right)\right]}{\ln\left[1-\frac{\Delta^*}{1-x+\frac{1}{2}\Delta^*}\right]}.$$

当 $p^* \approx 1$ 时，上式右端在 $x=\frac{1}{2}\Delta^*$ 时达到上确界

$$[\ln(2(1-p^*))]/\ln(1-\Delta^*).$$

从(1.9)知，只要取 r 为不小于这个上确界的正整数，则 (p^*,Δ^*) 条件就满足了．

为了评价这样得到的方案

$$\mathscr{P}_1 = (\mathrm{PW}, |S_1 - S_2| = r, S),$$

需要计算平均样本量 $E_\theta\tau_1$ 及来自不利总体的平均抽样量 $E_\theta\tau_B$（τ_B 是来自较小参数的总体的抽样量）．以下记 E_θ 为 E．不妨设 $p_1 > p_2$（当 $p_1 < p_2$ 时可进行相仿的讨论）．于是

$$\tau_B = \sum_{i=1}^{\tau_1} I_{(\varphi_i = 2)}.$$

当 $|n| \leqslant r$ 时，令

$$U_n = E\left(\sum_{k=i+1}^{\tau_1} I_{(\varphi_k=2)} \mid \xi_i = n, \tau_1 \geqslant i, \varphi_{i+1} = 1\right),$$

$$V_n = E\left(\sum_{k=i+1}^{\tau_1} I_{(\varphi_k=2)} \mid \xi_i = n, \tau_1 \geqslant i, \varphi_{i+1} = 2\right);$$

这里 $$\xi_t = S_1(t) - S_2(t) \quad (t\geq 0)。$$

我们首先指出，U_n, V_n 与 i 无关。实际上，

$$U_n = E\left(\sum_{k=i+1}^{\tau} I_{\{\varphi_k=2\}} \cdot I_{\{\tau_1\geq k\}} \mid \xi_i = n, \tau_1 \geq i, \varphi_{i+1}=1\right)$$

$$= E\left(\sum_{k=i+1}^{\infty} I_{\{\varphi_k=2\}} I_{\{\xi_{i+1}\neq r,\cdots,\xi_{k-1}\neq r\}} \mid \xi_i = n,\right.$$

$$\left.\tau_1\geq i, \varphi_{i+1}\right)$$

但是$\{(\xi_k, \varphi_{k+1}), k\geq 0\}$是齐次马氏链，故 U_n 与 i 无关，同理 V_n 也与 i 无关。

引理1.3 对一切 $-r+1\leq n\leq r-1$，有

$$U_n = p_1 U_{n+1} + q_1 V_n, \tag{1.10}$$

$$V_n = p_2 V_{n-1} + q_2 U_n + 1, \tag{1.11}$$

这里 $q_i = 1 - p_i \ (i=1,2)$。

证明

$$U_n = E\left(\sum_{k=i+1}^{\infty} I_{\{\varphi_k=2\}} \cdot I_{\{\xi_{i+1}\neq r,\cdots,\xi_{k-1}\neq r\}}\right.$$

$$\left.\cdot I_{\{x_{1,\tau_1(i)+1}=1\}} \mid \xi_i = n, \tau_1\geq i, \varphi_{i+1}=1\right)$$

$$+ E\left(\sum_{k=i+1}^{\infty} I_{\{\varphi_k=2\}} \cdot I_{\{\xi_{i+1}\neq r,\cdots,\xi_{k-1}\neq r\}}\right.$$

$$\left.\cdot I_{\{x_{1,\tau_1(i)+1}=0\}} \mid \xi_i = n, \tau_1\geq i, \varphi_{i+1}=1\right)$$

$$= p_1 U_{n+1} + q_1 V_n。$$

这就证明了（1.10）。同理可以证明(1.11)成立。证毕。

从（1.10）和（1.11）得方程

$$p_1 U_{n+1} - (p_1+p_2)U_n + p_2 U_{n-1} + q_1 = 0,$$

这是一个非齐次的差分方程，有一个特解

$$U_n = \frac{-q_1 n}{p_1 - p_2},$$

故方程之通解是

$$U_n = C_1 + C_2\lambda^n - \frac{q_1 n}{p_1 - p_2} \quad \left(\lambda = \frac{p_2}{p_1}\right).$$

注意 $U_r = 0, V_{-r} = 0$，可求出

$$C_1 = \frac{q_1 r}{p_1 - p_2} - \frac{2q_1^2 r + p_1 q_1 \lambda^r}{(p_1 - p_2)(q_1\lambda^r - q_2\lambda^{-r})},$$

$$C_2 = \frac{2q_1^2 r + p_1 q_1}{(p_1 - p_2)(q_1\lambda^r - q_2\lambda^{-r})}$$

$$U_n = \frac{q_1(r-n)}{p_1 - p_2} - \frac{(2q_1 r + p_1)q_1\lambda^r(\lambda^r - \lambda^n)}{(p_1 - p_2)(q_1\lambda^{2r} - q_2)},$$

$$V_n = \frac{q_1(r-n) + p_1}{p_1 - p_2} - \frac{(2q_1 r + p_1)\lambda^r(q_1\lambda^r - q_2\lambda^n)}{(p_1 - p_2)(q_1\lambda^{2r} - q_2)}.$$

其中 $-r+1 \leqslant n \leqslant r-1$。

我们假定开始时各以概率$\frac{1}{2}$从总体 Π_1 和 Π_2 中抽样，故

$$E\tau_B = \frac{1}{2}(U_0 + V_0),$$

所以

$$E_{(p_1,p_2)}\tau_B = \frac{(2q_1 r + p_1)(1-\lambda^r)(q_1\lambda^r - q_2)}{2(p_1 - p_2)(q_1\lambda^{2r} - q_2)}.$$

当 $p_1 < p_2$ 时，用同样的方法知

$$E_{(p_1,p_2)}\tau_B = \frac{(2q_2 r + p_2)(1-\lambda^r)(q_1\lambda^r - q_2)}{2(p_1 - p_2)(q_1\lambda^{2r} - q_2)}.$$

记

$$p_A = \max(p_1, p_2), \quad p_B = \min(p_1, p_2),$$
$$q_A = 1 - p_A, \quad q_B = 1 - p_B,$$

则对一切 $p_1 \neq p_2$，有

$$E_{(p_1,p_2)}\tau_B = \frac{[2(1-p_A)r + p_A](1-\lambda^r)(q_1\lambda^r - q_2)}{2(p_1 - p_2)(q_1\lambda^{2r} - q_2)}.$$

用 τ_A 表示从有利总体(即含较大参数值 p_A 的总体)中的抽样数。当然 $\tau_1=\tau_A+\tau_B$。仿效上面用过的计算 $E\tau_B$ 的方法，可求出

$$E_{(p_1,p_2)}\tau_A=\frac{[2r(1-p_B)+p_B](1-\lambda^r)(q_1\lambda^r-q_2)}{2(p_1-p_2)(q_1\lambda^{2r}-q_2)}.$$

于是得

$$E_{(p_1,p_2)}\tau_1=\frac{(1-\lambda^r)(q_1\lambda^r-q_2)\left[r(q_1+q_2)+\frac{1}{2}(p_1+p_2)\right]}{(p_1-p_2)(q_1\lambda^{2r}-q_2)},$$

易看出

$$E_{(p_1,p_2)}\tau_B<E_{(p_1,p_2)}\tau_A\quad(p_1\neq p_2).$$

上面我们仔细讨论了选择方法

$$\mathscr{P}_1=(\mathrm{PW},|S_1-S_2|=r,S),$$

究竟这个 $\mathscr{P}_1$ 有什么优缺点呢？这需要同其它方法加以比较。对其它方法，例如

$$\mathscr{P}_2\triangleq(\mathrm{VT},|S_1-S_2|=r,S),$$
$$\mathscr{P}_3\triangleq(\mathrm{PL},|F_1-F_2|=r,F)$$

等等，也可以计算出满足(p^*,Δ^*)条件的 r 以及平均抽样量 $E\tau$，$E\tau_A,E\tau_B$。由于篇幅的限制,这里不去具体计算了。很自然想到，应在满足(p^*,Δ^*) 条件下，比较各种方法下的平均抽样量及不利总体中的平均抽样量。值得指出的是，没有一种方法比其它各种方法绝对地好。以下我们称两个方法$\mathscr{P}$与$\mathscr{E}$是可比较的，若它们在参数允许的范围内正确选择的概率的下确界相同(或近似相同)。在这个意义下，上述三个方法 $\mathscr{P}_1,\mathscr{P}_2,\mathscr{P}_3$ 都是可以相互比较的，比较结果见表1.2。

这个表的用法是：若以平均抽样量$E\tau$ 的大小为衡量标准($E\tau$较小的方法较优),则查表知，当$p_A\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$时，$\mathscr{P}_1$优于$\mathscr{P}_2$和$\mathscr{P}_3$，当$p_A\in\left[\frac{9}{10},1\right)$时，$\mathscr{P}_3$优于$\mathscr{P}_1$和$\mathscr{P}_2$，…。从表1.2看出，没有一个方法比其它两个方法一致地好。

表 1.2

	$E\tau$	$E\tau_R$
$\mathscr{P}_1$	$p_A\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$	$p_A\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$
$\mathscr{P}_2$	$p_A\in\left(\frac{1}{4},\frac{9}{10}\right)$	$p_A\in\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$
$\mathscr{P}_3$	$p_A\in\left[\frac{9}{10},1\right)$	$p_A\in\left[\frac{3}{4},1\right)$

$p_A \equiv \max(p_1,p_2)$

还有许多其它的方法，比较重要的有：

$$\mathscr{P}_4\triangleq(\mathrm{PW},\max(S_1,S_2)=r,S),$$
$$\mathscr{P}_5\triangleq(\mathrm{VT},\max(S_1,S_2)=r,S),$$
$$\mathscr{P}_6\triangleq(\mathrm{PW},\min(F_1,F_2)=r,S),$$
$$\mathscr{P}_7\triangleq(\mathrm{PL},\max(F_1,F_2)=r,F),$$
$$\mathscr{P}_8\triangleq\left(\mathrm{PW},|S_1-S_2|=r\text{ 或 }|\hat{p}_1-\hat{p}_2|\geqslant\frac{C}{F_1+F_2},S\right),$$
$$\mathscr{P}_9\triangleq\left(\mathrm{VT},|S_1-S_2|=r\text{ 或 }|\hat{p}_1-\hat{p}_2|\geqslant\frac{C}{F_1+F_2},S\right),$$
$$\mathscr{P}_{10}\triangleq(\mathrm{PW},\max(S_1,S_2)=r\text{ 或 }F_1=F_2=C,S),$$
$$\mathscr{P}_{11}\triangleq(\mathrm{VT},\max(S_1,S_2)=r\text{ 或 }\min(F_1,F_2)=C,S),$$
$$\mathscr{P}_{12}\triangleq(\mathrm{PW},|S_1-S_2|=r\text{ 或 }F_1+F_2=C,S),$$

其中 $\hat{p}_j=S_j/(S_j+F_j)$，$j=1,2$。

对这些方案（以及其它的方案）都需要进行仔细的研究，读者可去看 H.Büringer等人(1980)的专著。这里只说几点结论：当 p_A 小时，$\mathscr{P}_8$ 与 $\mathscr{P}_1$ 一样好；当 p_A 大时，$\mathscr{P}_8$ 比 $\mathscr{P}_1$ 好；$\mathscr{P}_{12}$ 叫做 Fushmi 方法，它比 $\mathscr{P}_1,\mathscr{P}_{10},\mathscr{P}_{11}$ 都好，它不如$\mathscr{P}_8$ 好，但它的停时是有界的，而$\mathscr{P}_8$ 的停时只是有限的。

这方面的研究并没有完结，在各种补充要求下，寻求优良的方法仍然是许多作者的研究对象。大量的文献仍是集中在 k 个贝

努里总体的选择问题上，对其它总体研究较少。除了上述 Büringer 等人的著作外，还可参阅 R.E. Bechhoffer and R.V. Kulkarni (1982) 及 Ghosh and Sen (1991)的第 15 章。

§2 平均模型——Multi-armed bandit 问题

本节讨论一类特殊的选择问题，即所谓 Multi-armed bandit 问题（简称 MAB 问题）。这个问题起源于 H.Robbins(1952)的著名工作，是一个提法简单但并不平凡的序贯控制问题。虽然该问题的名称来自赌博，但它却有广泛的实际意义，在序贯临床试验中就有这种问题的例子(参看 §1 中例 2)。该问题的一般提法是：设 $\Pi_1,\Pi_2,\cdots,\Pi_k(k\geqslant 2)$是 k 个一维总体，Π_j 的分布函数是 $F(x,u_j),u_j\in U(j=1,\cdots,k)$，$U$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中已知的 Borel 集。假设从每个总体进行的观测(抽样)和不同总体进行的观测(抽样)都是彼此独立的，且

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,\mathrm{d}F(x,u)<\infty \quad (u\in U).$$

我们应该如何序贯地从这 k 个总体中抽样，以使得抽样(观测) n 次得到的观测值在长时间($n\to\infty$)内有最大的均值？注意，在这个问题的提法里，不考虑停止法则和终止判决法则，只考虑(序贯)抽样法则。

沿用 §1 中的记号。概率空间为$(\Omega,\mathscr{F},P_{\underline{u}})$，这里 $\Omega=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\cdots$，$\mathscr{F}$是 Ω 中全体柱集生成的 σ 代数，$\underline{u}=(u_1,\cdots,u_k)\in U^k$；$x_{j_1},x_{j_2},\cdots$是独立同分布的随机变量列，$x_{j_1}$的分布函数是$F(x,u_j)$ $(j=1,\cdots,k)$. 仍记$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots)$为抽样法则(见 §1 中定义1.1.)，记 y_n 为第 n 次观测值，即

$$y_n=x_{\varphi_n,T_n(\varphi_n)} \quad (n\geqslant 1), \tag{2.1}$$

这里

$$T_n(j)=\sum_{i=1}^{n}I_{(\varphi_i=j)}\ .\tag{2.2}$$

令

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}y_i,\quad E_{\underline{u}}^{\varphi}S_n=\int_{\Omega}S_n\,\mathrm{d}P_{\underline{u}},\tag{2.3}$$

$$\mu^*\triangleq\mu^*(\underline{u})=\max(\mu(u_1),\cdots,\mu(u_k)),$$

$$R_n^{\varphi}(\underline{u})=n\mu^*-E_{\underline{u}}^{\varphi}S_n.\tag{2.4}$$

我们称 $R_n^{\varphi}(\underline{u})$为 φ 在头 n 步中的"遗憾"(regret)。

MAB 问题：如何给出抽样法则 φ，使得对一切参数 $\underline{u}\in U^k$，$E_{\underline{u}}^{\varphi}S_n$ 在 n 充分大时达到最大值？

显然，MAB 问题等价于下列问题：如何给出法则 φ，使得 n 很大时，φ 在头 n 步中的"遗憾"最小？

已有很多文章研究这个问题，其中 Lai 和 Robbins (1985) 的文章是比较深刻的一篇，值得重视。下面主要是介绍他们的工作。

设 $f(x,u)$是分布函数 $F(x,u)$的密度函数（关于 σ 有限测度 ν），称

$$I(\theta,\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\ln\frac{f(x,\theta)}{f(x,\lambda)}\right]f(x,\theta)\mathrm{d}\nu\tag{2.5}$$

为 Kullback-Leibler 信息量，它是用来刻画分布函数 $F(x,\theta)$ 与 $F(x,\lambda)$的差异的。显然，

$$0\leqslant I(\theta,\lambda)\leqslant\infty.$$

我们恒假定：$\theta\neq\lambda$ 时，

$$0<I(\theta,\lambda)<\infty.$$

我们还提出下列假定：

假定A_1：对任何 $\varepsilon>0$ 和满足 $\mu(\lambda)>\mu(\theta)$的 θ,λ，存在$\delta>0$，使得对一切满足

$$\mu(\lambda)\leqslant\mu(\lambda')\leqslant\mu(\lambda)+\delta$$

的 λ' 均有

$$|I(\theta,\lambda)-I(\theta,\lambda')|<\varepsilon. \tag{2.6}$$

假定A_2：对任何 $\lambda\in U$ 及 $\varepsilon>0$，存在 $\lambda'\in U$，满足：

$$\mu(\lambda)<\mu(\lambda')<\mu(\lambda)+\delta. \tag{2.7}$$

令

$$A(j)=\{\underline{u}:\ \underline{u}=(u_1,\cdots,u_k),\mu(u_j)<\max_{i\neq j}\ \mu(u_i)\} \tag{2.8}$$

$$B(j)=\{\underline{u}:\ \underline{u}=(u_1,\cdots,u_k),\mu(u_j)>\max_{i\neq j}\ \mu(u_i)\} \tag{2.9}$$

定义2.1 称法则 φ 是容许的，若对一切$1\leqslant j\leqslant k$，$\underline{u}\in B(j)$，$a>0$，有

$$R_n^{\varphi}(\underline{u})=0(n^a)\ \ (n\to\infty). \tag{2.10}$$

容许法则的直观意义见下面的引理 2.2。

我们要证明下列重要结论。

定理2.1 如果假定 A_1,A_2 成立，则对任何容许法则 φ，有不等式

$$\varliminf_{n}\frac{1}{\ln n}R_n^{\varphi}(\underline{u})\geqslant\sum_{\mu(u_j)<\mu^*}(\mu^*-\mu(u_j))/I(u_j,u^*), \tag{2.11}$$

这里

$$\underline{u}=(u_1,\cdots,u_k)\in U^k,$$

$$\mu^*=\max_{1\leqslant j\leqslant k}\mu(u_j)=\mu(u^*)(u^*\in\{u_1,\cdots,u_k\}).$$

为了证明这个定理，先证明几条引理。

引理2.1 $$E_{\underline{u}}S_n=\sum_{j=1}^{k}\mu(u_j)E_{\underline{u}}T_n(j).$$

证明 $$E_{\underline{u}}S_n=E_{\underline{u}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)=E_{\underline{u}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{\varphi_i,T_i(\varphi_i)}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}E_{\underline{u}}\left(\sum_{j=1}^{k}I_{(\varphi_i=j)}x_{j,T_i(j)}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{i} E_{\underline{u}} I_{(\varphi_i = j)} \cdot I_{(T_i(j)=l)} \cdot x_{jl}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{i} \mu(u_j) E_{\underline{u}} (I_{(\varphi_i = j)} I_{(T_i(j)=l)})$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \mu(u_j) E_{\underline{u}} \left(\sum_{i=1}^{n} I_{(\varphi_i = j)} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \mu(u_j) E_{\underline{u}} T_n(j).$$

证毕。

引理2.2 设 φ 是容许法则，则对任何 $\underline{u} \in A(j)$（见(2.8)）及 $\delta > 0$，只要 $\mu(\lambda) > \mu^* = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \mu(u_i)$，则必有

$$\lim_{n} P_{\underline{u}} \left(T_n(j) > \frac{(1-\delta) \ln n}{I(u_j, \lambda)} \right) = 1. \qquad (2.12)$$

证明 设 $\underline{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_k)$，这里 $\beta_i = u_i (i \neq j), \beta_j = \lambda$。由于 $\underline{\beta} \in \beta(j)$，从引理 2.1 知

$$R_n^{\varphi}(\underline{\beta}) = \sum_{i \neq j} [\mu(\lambda) - \mu(u_i)] E_{\underline{\beta}} T_n(i)$$

$$\geqslant \min_{i \neq j} [\mu(\lambda) - \mu(u_i)] \cdot \sum_{i \neq j} E_{\underline{\beta}} T_n(i),$$

于是

$$\sum_{i \neq j} E_{\underline{\beta}} T_n(i) = o(n^a).$$

另一方面，若令

$$E_n = \{ T_n(j) \leqslant (1-\delta)(I(u_j, \lambda))^{-1} \ln n \},$$

则

$$\sum_{i \neq j} E_{\underline{\beta}} T_n(i) = E_{\underline{\beta}}(n - T_n(j)) \geqslant \int_{E_n} [n - T_n(j)] \mathrm{d} P_{\underline{\beta}}$$

$$\geqslant (n-(1-\delta)(I(u_j,\lambda))^{-1}\ln n P_{\underline{\beta}}(E_n),$$

从而有

$$P_{\underline{\beta}}(E_n)=o(n^{a-1})\quad(n\to\infty). \tag{2.13}$$

令

$$L_i=\ln\left\{\prod_{l=1}^{i}[f(x_{jl},u_j)/f(x_{jl},\lambda)]\right\},$$

$$D_n=E_n\cap\{L_{T_n(j)}\leqslant(1-a)\ln n\}.$$

我们指出

$$P_{\underline{u}}(D_n)=o(1)\quad(n\to\infty).$$

实际上，

$$P_{\underline{\beta}}\{T_n(1)$$

$$=i_1,\cdots,T_n(l)=i_l,\cdots,T_n(k)=i_k,L_{T_n(j)}\leqslant(1-a)\ln n\}$$

$$=\int_{\left\{\substack{T_n(1)=i_1,\cdots,T_n(k)=i_k\\ L_{i_j}\leqslant(1-a)\ln n}\right\}}\prod_{l=1}^{i}[f(x_{jl},\lambda)/f(x_{jl},u_j)]\mathrm{d}P_{\underline{u}}$$

$$\geqslant e^{-(1-a)\ln n}\cdot P_{\underline{u}}(T_n(1)=i_1,\cdots,T_n(k)=i_k,$$

$$L_{i_j}\leqslant(1-a)\cdot\ln n),$$

于是

$$P_{\underline{\beta}}(D_n)\geqslant n^{a-1}P_{\underline{u}}(D_n).$$

利用(2.13)知

$$P_{\underline{u}}(D_n)=o(1)\quad(n\to\infty).$$

利用强大数律知

$$\lim_n\frac{1}{n}L_n=I(u_j,\lambda)(\text{a.s.}P_{\underline{u}}).$$

取定 $0<a<\delta<1$。易知

$$P_{\underline{u}}(E_n)\leqslant P_{\underline{u}}(E_n\cap\{L_{T_n(j)}\leqslant(1-a)\ln n\})$$

$$+P_{\underline{u}}(\text{存在 } i\leqslant(1-\delta)(I(u_j,\lambda))^{-1}\ln n \text{使得} L_i>(1-a)\ln n)$$

$$\leqslant P_{\underline{u}}(D_n)+P_{\underline{u}}\{存在\ i\leqslant i_0\ 使得\ L_i>(1-a)\ln n\}$$

$$+P_{\underline{u}}\{存在\ i>i_0\ 使得\frac{1}{i}L_i>\frac{1-a}{1-\delta}I(u_j,\lambda)\}$$

$$=o(1)\quad(n\to\infty).$$

这就证明

$$P_{\underline{u}}(T_n(j)\leqslant(1-\delta)(I(u_j,\lambda))^{-1}\ln n)=o(1)\,(n\to\infty).$$

故(2.12)成立。证毕。

定理2.1的证明 设φ是任一容许法则．由于

$$\frac{1}{\ln n}E_{\underline{u}}T_n(j)\geqslant(1-\delta)(I(u_j,\lambda))^{-1}$$

$$\cdot P_{\underline{u}}\left\{\frac{1}{\ln n}T_n(j)\geqslant(1-\delta)(I(u_j,\lambda))^{-1}\right\},$$

从引理 2.2 知

$$\underline{\lim}\frac{1}{\ln n}E_{\underline{u}}T_n(j)\geqslant(1-\delta)(I(u_j,\lambda))^{-1}.$$

令$\delta\to0$,再利用引理 2.1 知

$$\underline{\lim}_{n}\frac{1}{\ln n}R_n^{\varphi}(\underline{u})\geqslant\sum_{\mu(u_j)<\mu^*}(\mu^*-\mu(u_j))\frac{1}{I(u_j,\lambda)}.$$

根据假定A_1及A_2,对任何$\varepsilon>0$,有λ满足

$$\mu(\lambda)>\mu^*=\mu(u^*),$$
$$|I(u_j,u^*)-I(u_j,\lambda)|<\varepsilon.$$

这就证明了(2.11)成立．证毕．

定义2.2 称抽样法则φ是渐近最优的，若φ是容许的而且(2.11)中等号对一切$\underline{u}$成立．

渐近最优的法则是否存在呢？根据 Lai 和 Robbins (1985) 的

研究，当参数集U是一维 Borel 集时，在相当广泛的条件下，可构造出渐近最优的法则。他们的方法是基于未知均值$\mu(u_1),\cdots,\mu(u_k)$的置信序列。具体介绍如下：

为确定起见，设$x_1,x_2,\cdots$是概率空间$(\Omega_1,\mathscr{F},P_u)(u\in U)$上的独立同分布的随机变量列，$x_1$的分布函数是$F(x,u)$，密度函数是$f(x,u)$（关于$\sigma$有限测度$\nu$），这里$u$是未知参数，$U$是一维 Borel 集。我们来考察$\mu(u)$的置信序列。设$g_{ni}$是$\boldsymbol{R}^i$上有定义的广义实值 Borel 可测函数，满足下列三个条件：

(i) 对一切$u\in U,r<\mu(u)$，有

$$P_u(r>g_{ni}(x_1,\cdots,x_i)\ 对某个\ i\leqslant n)=o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.14)$$

(ii) 当$\mu(\lambda)>\mu(u)$时，有

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\overline{\lim_{n}}\frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{n}P_u(g_{ni}(x_1,\cdots,x_i)\geqslant\mu(\lambda)-\varepsilon)\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{I(u,\lambda)}. \quad (2.15)$$

(iii) 对一切$n\geqslant i\geqslant 1$，有

$$g_{n+1,i}\geqslant g_{ni}. \quad (2.16)$$

我们称满足这三个条件的$\{g_{ni}\}$为$\mu(u)$的正则上置信列。我们还要使用$\mu(u)$的点估计。设h_i是R^i上的 Borel 可测函数，满足下列两个条件：

(iv) 对一切$n\geqslant i\geqslant 1$，有

$$h_i\leqslant g_{ni}. \quad (2.17)$$

(v) 对一切$u\in U,\varepsilon>0$及$\delta\in(0,1)$，有

$$P_u\{\max_{\delta n<i<n}|h_i(x_1,\cdots,x_i)-\mu(u)|>\varepsilon\}=o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.18)$$

我们来论证，只要有了满足上述要求的函数列$\{g_{ni}\}$及$\{h_i\}$，就可以构造出渐近最优的法则。至于这样的函数列如何构造出，

后面还要论述。

沿用前面的记号。总体Π_j的分布函数是$f(x,u_j)(1\leqslant j\leqslant k)$，$x_{j1},x_{j2},\cdots$是来自总体$\Pi_j$的独立随机变量列。令

$$\hat{\mu}_n(j)=h_{T_n(j)}(x_{j1},\cdots,x_{j,T_n(j)}), \qquad (2.19)$$

$$U_n(j)=g_{n,T_n(j)}(x_{j1},\cdots,x_{j,T_n(j)}), \qquad (2.20)$$

我们来定义一个特殊的法则$\varphi^*=(\varphi_1^*,\varphi_2^*,\cdots)$如下：固定$\delta\in(0,1/k)$，对一切$n\geqslant 0$，

$$\varphi_{n+1}^*=\begin{cases} n+1, & \text{当 } 0\leqslant n\leqslant k-1, \\ j, & \text{当 } n\geqslant k, n+1=j(\bmod k) \text{ 且 } \hat{\mu}_n(j_n) \\ & \qquad \leqslant U_n(j), \\ j_n, & \text{当 } n\geqslant k, n+1=j(\bmod k) \text{ 且 } \hat{\mu}_n(j_n) \\ & \qquad > U_n(j), \end{cases}$$

这里$T_n(j)=\sum_{i=1}^{n} I_{\{\varphi_i^*=j\}}$；$x_{j1},x_{j2},\cdots$是取自总体$\Pi_j$的逐次观测值，$\hat{\mu}_n(j)$，$U_n(j)$的定义见(2.19)和(2.20)；$j_n$的定义是：

$$j_n=\min\{l:\ T_n(l)\geqslant\delta n \text{ 且 } \hat{\mu}_n(l)=\max_{T_n(i)\geqslant\delta n}\hat{\mu}_n(i)\}.$$

定理2.2 在假定A_1及A_2下，φ^*是渐近最优法则。

证明 设$\underline{u}=(u_1,\cdots,u_k)\in U^k$。为了证明$\varphi^*$是渐近最优的，只须证明：对于满足不等式

$$\mu(u_j)<\mu^*=\max\mu(u_i)$$

的j，恒有

$$E_{\underline{u}}T_n(j)\leqslant\frac{1+o(1)}{I(u_j,u^*)}\ln n \quad (n\to\infty), \qquad (2.21)$$

这里u^*满足$\mu^*=\mu(u_j^*)$。

实际上，一旦(2.21)成立，对φ^*来讲，(2.11)中等号成立，从而φ^*就是渐近最优的。

(2.21)的证明过程相当复杂，初学者要耐心体会。记

$$L=\{l:\ 1\leqslant l\leqslant k,\mu(u_l)=\mu^*\}.$$

用#A 表示集合 A 中所含元素的个数。设

$$0<\varepsilon<\frac{1}{2}(\mu^*-\max_{j\bar{\in}L}\mu(u_j)),\quad j\in L,N>k,$$

不难推知有下列不等式：

$$\begin{aligned}T_N(j)\leqslant 2&+\#\{n:\ k\leqslant n\leqslant N-1,j_n\in L,\\&\quad|\hat{\mu}_n(j_n)-\mu^*|\leqslant\varepsilon \text{ 且 } \varphi^*_{n+1}=j\}\\&+\#\{n:\ k\leqslant n\leqslant N-1,j_n\in L,|\hat{\mu}_n(j)-\mu^*|>\varepsilon\}\\&+\#\{n:\ k\leqslant n\leqslant N-1,j_n\bar{\in}L\}\\&\triangleq 2+I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

我们对 I_1,I_2,I_3 分别进行估计。

$$\begin{aligned}I_1&\leqslant\#\{n:\ k\leqslant n\leqslant N-1,\varphi^*_{n+1}=j,j_n\in L,\\&\quad\hat{\mu}_n(j_n)\geqslant\mu^*-\varepsilon,U_n(j)\geqslant\hat{\mu}_n(j_n)\}\\&\leqslant\#\{n:\ k\leqslant n\leqslant N-1,\varphi^*_{n+1}=j,\\&\quad g_{n,T_n(j)}(x_{j1},\cdots,x_{j,T_n(j)})\geqslant\mu^*-\varepsilon\}\\&\leqslant\#\{i:\ 1\leqslant i\leqslant N-1,g_{Ni}(x_{j1},\cdots,x_{ji})\geqslant\mu^*-\varepsilon\}.\end{aligned}$$

于是从(2.15)知，对任何 $\eta>0$，只要 ε 足够小，有

$$E_{\underline{u}}I_1\leqslant(1+\eta+o(1))(\ln N)/I(u_j,u^*)\quad(N\to\infty).$$

因为 $T_n(j_n)\geqslant\delta n$，故

$$\begin{aligned}&P_{\underline{u}}(j_n\in L,|\hat{\mu}_n(j_n)-\mu^*|>\varepsilon)\\&\quad\leqslant P_{\underline{u}}\{\max_{l\in L}\max_{\delta n<i<n}|h_i(x_{l1},\cdots,x_{li})-\mu^*|>\varepsilon\}\\&\quad\leqslant\sum_{l\in L}P_{\underline{u}}\{\max_{\delta n<i<n}|h_i(x_{l1},\cdots,x_{li})-\mu(u_l)|>\varepsilon\}\\&\quad=o\left(\frac{1}{n}\right)\ (\text{根据}(2.18)).\end{aligned}$$

所以

$$E_{\underline{u}} I_2 \leqslant \sum_{n=1}^{N-1} P_{\underline{u}}(j_n \in L, |\hat{\mu}_n(j_n) - \mu^*| > \varepsilon)$$

$$= o(\ln N) \quad (N \to \infty).$$

最后来估计 $E_{\underline{u}} I_3$，这一步最为复杂。取正整数C满足：

$$(1 - C^{-1})/k > \delta.$$

对于非负整数 r，令

$$E(r) = \bigcap_{j=1}^{k} \{ \max_{\delta C^{r-1} \leqslant n \leqslant C^{r+1}} |h_n(x_{j1}, \cdots, x_{jn}) - \mu(u_j)| \leqslant \varepsilon\},$$

$$F(r) = \bigcap_{l \in L} \{对一切\ n \in [C^{r-1}, C^{r+1}]及\ i \leqslant \delta n, \ g_{ni}(x_{l1}, \cdots, x_{li}) \geqslant \mu^* - \varepsilon\},$$

$$D(t) = \bigcap_{l \in L} \{对一切\ i \leqslant n_t，有\ g_{n_t i}(x_{l1}, \cdots, x_{li}) \geqslant \mu^* - \varepsilon\},$$

这里

$$n_t = [C^{r-1}\delta^{-t}], \quad t = 0, 1, \cdots, p,$$

$$p \triangleq \min\{n: [C^{r-1}\delta^{-n}] \geqslant C^{r+1}\},$$

注意，p 与 r 无关。

我们来证明下列关系式：

$$P_{\underline{u}}(E(r)^C) = o(C^{-r}) \quad (r \to \infty), \tag{2.22}$$

$$P_{\underline{u}}(F(r)^C) = o(C^{-r}) \quad (r \to \infty). \tag{2.23}$$

实际上，从(2.18)知

$$P_{\underline{u}}(E(r)^C)$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} P_{\underline{u}}(\max_{\delta C^{r-1} \leqslant n \leqslant C^{r+1}} |h_n(x_{j1}, \cdots, x_{jn})$$

$$-\mu(u_j)|>\varepsilon)=o(C^{-r-1})\quad(r\to\infty).$$

故(2.22)成立。从(2.14)知

$$P_{\underline{u}}(D(t)^c)$$

$$\leqslant\sum_{l\in L}P_{\underline{u}}(\text{存在 }i\leqslant n_t\text{ 使得 }g_{n_t i}(x_{l1},\cdots,x_{li})<\mu(u_l)-\varepsilon)$$

$$=o(n_t^{-1})=o(C^{-r})(r\to\infty).$$

不难验证 $F(r)\supset\bigcap_{t=0}^{p-1}D(t)$，于是

$$P_{\underline{u}}\,(F(r)^C)\leqslant\sum_{t=0}^{p-1}P_{\underline{u}}(D(t)^C),$$

从而(2.23)成立。

我们现在来证明：

$$P_{\underline{u}}\,(j_n\overline{\in}L)=o\left(\frac{1}{n}\right)\ (n\to\infty).\qquad(2.24)$$

首先指出，若 $n+1=mk+l$（m是正整数），$l\in L, C^{r-1}\leqslant n<C^{r+1}$ 而且 $\omega\in E(r)\cap F(r)$，则 φ^*_{n+1} 的值必属于 L。理由如下：

① $j_n\in L$，此时 $\varphi^*_{n+1}=l$ 或 j_n，当然 φ^*_{n+1} 的值属于 L。

② $j_n\overline{\in}L$，此时因为 $\omega\in E(r)$，故

$$\hat{\mu}_n(j_n)\leqslant\max_{j\overline{\in}L}\mu(u_j)+\varepsilon<\mu^*-\varepsilon.$$

若 $T_n(l)\geqslant\delta n$，则

$$U_n(l)\geqslant\hat{\mu}_n(l)\geqslant\mu^*-\varepsilon;$$

若 $T_n(l)<\delta n$，则在 $F(r)$ 上 $U_n(l)\geqslant\mu^*-\varepsilon$。总之，由于$\omega\in E(r)\cap F(r)$，$\hat{\mu}_n(j_n)<U_n(l)$，从而 $\varphi^*_{n+1}=l$。

可见不管是哪种情况，φ^*_{n+1} 的值属于 L。记

$$\nu_L(n)=\sum_{l\in L}T_n(l),$$

从上述讨论知道，对任何 $n\in[C^{r-1},C^{r+1}]$（r 充分大），在 $E(r)$

$\cap F(r)$上有

$$\nu_L(n) \geqslant \#(L) \cdot (n - C^{r-1} - 2k)/k > (\# L) \cdot \delta n,$$

因此存在 $l_1 \in L$，使得

$$T_n(l_1) > \delta n,$$

$$\hat{\mu}_n(l_1) \geqslant \mu(u_{l_1}) - \varepsilon > \max_{j \bar{\in} L} \mu(u_j) + \varepsilon$$

$$\geqslant \max\{\hat{\mu}_n(j): T_n(j) \geqslant \delta n, j \bar{\in} L\},$$

从而 $j_n \in L$。这表明只要 $r \geqslant r_0$（r_0 充分大）且 $C^r \leqslant n < C^{r+1}$ 在 $E(r) \cap F(r)$ 上必有 $j_n \in L$。于是

$$P_{\underline{u}}(j_n \bar{\in} L) \leqslant P_{\underline{u}}(E(r)^C) + P_{\underline{u}}(F(r)^C).$$

利用(2.22)及(2.23)就得到(2.24)。

从(2.24)立即推知

$$E_u I_3 \leqslant \sum_{n=k}^{N-1} P_{\underline{u}}(j_n \bar{\in} L) = o(\ln N) \quad (N \to \infty).$$

把上面关于 I_1, I_2, I_3 的估计结合起来，得到

$$E_{\underline{u}} T_N(j) \leqslant (1 + \eta + o(1))(\ln N)/I(u_j, u^*) \quad (N \to \infty).$$

由于 η 的任意性，知(2.21)成立。这就证明了 φ^* 是渐近最优的法则。定理2.2全部证毕。

怎样找出满足条件(2.14)—(2.18)的置信序列$\{g_{ni}\}$和$\{h_i\}$呢？由于篇幅的限制，我们不去进行一般性讨论，只对正态总体进行具体研究。设 Π_j 服从正态分布 $N(u_j, \sigma^2)$，$j = 1, 2, \cdots, k$，这里 σ^2 是已知的，$u_1, \cdots, u_k$ 是未知的。设 $x_{j1}, x_{j2}, \cdots$是来自Π_j 的独立随机变量列（$j = 1, \cdots, k$），此时密度函数为

$$f(x, u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(x - u)^2 \right\}, \quad u \in (-\infty, \infty),$$

$$\mu(u) = u,$$

Kullback-Leibler 信息量为：

$$I(u,\lambda)=\frac{1}{2\sigma^2}(u-\lambda)^2 \quad (u<\lambda).$$

显然，假定 A_1 及 A_2 均满足。记

$$\bar{x}_j(i)=\frac{1}{i}\sum_{l=1}^{i} x_{jl} \quad (i\geqslant 1).$$

令

$$g_{ni}(x_{j1},\cdots,x_{ji})=\bar{x}_j(i)+\sigma\left(\frac{2\ln n}{i}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.25)$$

$$h_i(x_{j1},\cdots,x_{ji})=\bar{x}_j(i), \qquad (2.26)$$

我们来验证序列$\{g_{ni}\}$和$\{h_i\}$满足前面的条件(2.14)—(2.18)。

(2.16)和(2.17)是显然成立的，现在来验证(2.18)成立。根据 Baum-Katz 定理（见 Chow and Teicher(1978))知道，对一切 $\varepsilon>0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{\underline{u}}\{\sup_{k\geq n}|\bar{x}_j(k)-u_j|\geqslant\varepsilon\}<\infty$$

（这里$\underline{u}=(u_1,\cdots,u_k)\in \boldsymbol{R}^k$)。但这个收敛级数的通项随 n 单调下降，故

$$P_{\underline{u}}\{\sup_{k\geq n}|\bar{x}_j(k)-u_j|\geqslant\varepsilon)=o\left(\frac{1}{n}\right),$$

从而

$$P_{\underline{u}}(\max_{\delta n\leq i\leq n}|\bar{x}_j(i)-u_j|\geqslant\varepsilon)=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

故(2.18)成立。

对任何 $r<u_j$,

$$P_{\underline{u}}(r>g_{ni})=P_u\left(r-u_j>\bar{x}_j(i)-u_j+\sigma\sqrt{\frac{2}{i}\ln n}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\ln n}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u_j-r}{\sigma}\right)^2\cdot i+2\ln n\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{n\sqrt{2\ln n}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{u_j - r}{\sigma}\right)^2 i \right\}.$$

故

$$P_{\underline{u}}(\text{存在 } i \leqslant n \text{ 使得 } g_{ni} < r)$$

$$\leqslant \frac{1}{n\sqrt{2\ln n}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{u_j - r}{\sigma}\right)^2 i \right\}$$

$$= o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty).$$

这表明(2.14)成立。

最后证明(2.15)也成立。设 $\lambda > u_j$,

$$L_n \triangleq \sup\{i:\ 1 \leqslant i \leqslant n \text{ 且 } g_{ni} \geqslant \lambda\},$$

$$T_\varepsilon \triangleq \sup\{i:\ i \geqslant 1, |\bar{x}_j(i) - u_j| \geqslant \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0, \sup \varnothing \triangleq 0).$$

从 Baum-Katz 定理 知 $E_{\underline{u}} T_\varepsilon < \infty$。给定 $\varepsilon \in (0; \lambda - u_j)$,易知

$$E_{\underline{u}}(L_n I_{(L_n > T_\varepsilon)})$$

$$\leqslant E_{\underline{u}} \sup\left\{ i:\ u_j + \varepsilon + \sigma\sqrt{\frac{2}{i}\ln n} \geqslant \lambda \right\}$$

$$\leqslant \frac{2\sigma^2 \ln n}{(\lambda - u_j - \varepsilon)^2},$$

故

$$E_{\underline{u}} L_n \leqslant E_{\underline{u}} T_\varepsilon + \frac{2\sigma^2 \ln n}{(\lambda - u_j - \varepsilon)^2}.$$

先令 $n \to \infty$,再令 $\varepsilon \to 0$,得

$$\overline{\lim_n} \frac{1}{\ln n} E_{\underline{u}} L_n \leqslant \frac{2\sigma^2}{(\lambda - u_j)^2} = \frac{1}{I(u_j, \lambda)},$$

于是

$$\overline{\lim_n} \frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^{n} P_{\underline{u}}(g_{ni}(x_{j1}, \cdots, x_{ji}) \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{I(u_j, \lambda)}.$$

这表明(2.15)成立。

既然序列(2.25)和(2.26)满足条件(2.14)—(2.18)，故可用来构造渐近最优的法则φ^*。

对于k个贝努里总体的情形，也可用类似的方法构造出符合要求的置信序列来。更一般地，对属于单参数指数族的k个总体，也能构造出相应的置信序列来。

作为本节的结尾，我们指出Lai和Robbins(1985)并未对含有讨厌参数的情形进行具体讨论。孙嘉阳(1986)研究了这一比较复杂的情况，她在所谓“不变的序贯抽样法则”的类中讨论了“遗憾”(regret)的下界，并在相当一般的条件下给出了达到所述下界的序贯抽样法则。

§3 马尔可夫折扣决策模型

本节讨论的选择问题属于序贯随机控制论的范围。

我们要研究的模型包含下列五个要素：

1) 状态空间$(X,\mathscr{B})$——这是任意的可测空间，其中$\mathscr{B}$包含X的所有单点子集。X的元叫做状态。

2) 行动空间$(A,\mathscr{U})$——这也是可测空间，但假设A是至多可数集，$\mathscr{U}$由A的全体子集组成①。A的元叫做行动(或控制)。

3) 转移函数$P(B|x,a)$——当$x\in X,a\in A$时，$P(\cdot\,|x,a)$是$\mathscr{B}$上的概率测度，当$B\in\mathscr{B}$时，$P(B|\cdot,a)$是$\mathscr{B}$可测函数。

4) 报酬函数$R(x,a,y)$——对任何$a\in A,R(\cdot,a,\cdot)$是$(X\times X,\mathscr{B}\otimes\mathscr{B})$上的可测函数。以下恒设$R(x,a,y)$有界。

5) 折扣因子β——β是$(0,1)$中的一个数。

定义3.1 称五元集$(X,A,P(B|x,a),R,\beta)$为马尔可夫折扣(决策)模型。

这个模型的直观意义如下：我们要观察和控制某个“系统”

① 当A不可数时，也可以建立相应的理论，但涉及较复杂的数学，本书不讨论了。

的发展过程。设该系统的状态可用X的元来表示。在每一步（我们仅考虑离散时间情形），可对"系统"施加的行动（或控制）能用A中的元来表示。A就是可供选择的行动的集合。如果开始时"系统"的状态是x_0，施加行动$a_0(a_0\in A)$后，则"系统"的状态按条件概率$P(\cdot|x_0,a_0)$转移到状态x_1；若再施加行动a_1，则状态按条件概率$P(\cdot|x_1,a_1)$转移到状态$x_2,\cdots$，无限演变下去。设第n步时状态是x_n，施加的行动是a_n，则以条件概率$P(\cdot|x_n,a_n)$转移到x_{n+1}。这样的转移得到报酬$\beta^n R(x_n,a_n,x_{n+1})(n\geqslant 0)$。"系统"无限演变下去的总报酬是

$$L=\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n R(x_n,a_n,x_{n+1}). \tag{3.1}$$

折扣因子β的意义是：在第n步得到的单位报酬只相当于开始时（$n=0$）的β^n。

对于上述折扣模型，我们很关心的问题是：如何选择行动$a_0,a_1,a_2,\cdots$，使得总报酬的平均值达到最大？当然首先要问：是否存在选择行动的法则使得总报酬的平均值达到最大？

我们先对"选择行动的法则"给出正式定义。

定义3.2 设对一切$n\geqslant 0$，

$$\varphi_n=\varphi_n(x_0,a_0,x_1,a_1,\cdots,x_{n-1},a_{n-1},x_n)$$

是

$$(X\times A\times X\times A\times\cdots\times X\times A\times X,\mathscr{B}\otimes\mathscr{U}\otimes\mathscr{B}\otimes\mathscr{U}\otimes\cdots\otimes\mathscr{B}\otimes\mathscr{U}\otimes\mathscr{B})$$

到$(A,\mathscr{U})$的可测映射，则称序列$\varphi=(\varphi_0,\varphi_1,\cdots)$为控制法则（或称选择法则）。

为了评价和寻找优良的控制法则，我们引入概率空间如下：

$$\Omega\triangleq X\times A\times X\times A\times\cdots,$$

$\mathscr{F}$为Ω中普通的乘积σ代数，即$\mathscr{F}=(\mathscr{B}\otimes\mathscr{U})^\infty$。对任何控制法则$\varphi=(\varphi_0,\varphi_1,\cdots)$及状态$x\in X$，根据Tulcea定理，在$\mathscr{F}$上有概率测度$P_x^\varphi$满足下列要求：对一切$n\geqslant 0,C\in(\mathscr{B}\otimes\mathscr{U})^{n+1}$，有

$$P_x^\varphi\{(x_0,a_0,x_1,a_1,\cdots):\ (x_0,a_0,\cdots,x_n,a_n)\in C\}$$

$$=\int_X P(\mathrm{d}x_1|x,\varphi_0)\int_X P(\mathrm{d}x_2|x_1,\varphi_1)\int_X\cdots$$

$$\int_X P(\mathrm{d}x_n|x_{n-1},\varphi_{n-1})$$

$$\cdot I_C(x,\varphi_0,x_1,\varphi_1,\cdots,x_n,\varphi_n),$$

这里

$$\varphi_0=\varphi_0(x),\quad \varphi_1=\varphi_1(x,\varphi_0(x),x_1),$$

$$\varphi_2=\varphi_2(x,\varphi_0(x),x_1,\varphi_1(x,\varphi_0(x),x_1),x_2),\cdots.$$

概率测度 P_x^φ 的意义可如下解释：在 Ω 上定义随机变量列 $\{\xi_n\},\{\eta_n\}$。当

$$\omega=(x_0,a_0,x_1,a_1,\cdots)\in\Omega$$

时，$\xi_n(\omega)=x_n\ (n\geqslant 0),\eta_n(\omega)=a_n\ (n\geqslant 0)$。从 P_x^φ 之性质知

$$P_x^\varphi\{\xi_{n+1}\in B|\xi_0,\eta_0,\cdots,\xi_n,\eta_n\}$$

$$=P(B|\xi_{n-1},\eta_{n-1})\ (\mathrm{a.s.}P_x^\varphi),$$

这里 ξ_n 表示时刻 n 对应的状态，η_n 表示在时刻 n 采取的行动。序列 $\xi_0,\eta_0,\xi_1,\eta_1,\cdots$称为马氏决策过程．令

$$S(\varphi,x)=\int_\Omega\sum_{\beta=0}^{\infty}\beta^n R(x_n,a_n,x_{n+1})\mathrm{d}P_x^\varphi,$$

$S(\varphi,x)$表示“系统”从状态 x 出发采用控制法则 φ 后获得的总平均报酬。令

$$\hat{u}(x)=\sup_\varphi S(\varphi,x).$$

定义3.3 称法则 φ 是最优的，若

$$S(\varphi,x)=\hat{u}(x)\ \ (一切\ x\in X).$$

定义3.4 给定 $\varepsilon>0$，称法则 φ 是 ε 最优的，若

$$S(\varphi,x)\geqslant\hat{u}(x)-\varepsilon\ \ (一切\ x\in X).$$

定义3.5 称法则 $\varphi=(\varphi_0,\varphi_1,\cdots)$ 是马氏型的，若

$$\varphi_i=\varphi_i(x_i)\ \ (一切\ i\geqslant 0).$$

定义3.6 称法则 $\varphi=(\varphi_0,\varphi_1,\cdots)$是平稳马氏型的，若存在$X$到$A$的映射$f(x)$使得

$$\varphi_i=f(x_i)\quad(i\geqslant 0)。$$

此时记 $\varphi=f^\infty$。

本节的主要结论是：对任何$\varepsilon>0$，永远存在ε最优而且平稳马氏型的法则；若A是有限集，则必存在最优的而且是平稳马氏型法则。这就是著名的 Blackwell 定理（参看Blackwell(1965)）。这个定理的证明较长，要做许多准备工作。

引理3.1 设 $A=\{1,2,\cdots\}$（至多可数），$w(x,a)$是$(X\times A,\mathscr{B}\otimes\mathscr{U})$上的可测函数，$\varepsilon>0$，则存在$(X,\mathscr{B})$到$(A,\mathscr{U})$之可测映射$f(\cdot)$，满足：

$$w(x,f(x))\geqslant w(x,y)-\varepsilon\quad(一切\ x\in X,y\in A)。$$

证明 令

$$f(x)=\min\{i;\ i\in A,w(x,i)\geqslant\sup_{a\in A}w(x,a)-\varepsilon\}。$$

不难看出，$f(x)$就满足引理3.1的要求。证毕。

定理3.1 设 $\varphi=(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots)$是任一控制法则，则对任何$\varepsilon>0$，存在马氏型的控制法则 $\bar{\varphi}=(\bar{\varphi}_0,\bar{\varphi}_1,\cdots)$满足：

$$S(\bar{\varphi},x)\geqslant S(\varphi,x)-\varepsilon\quad(一切\ x\in X)。$$

证明 记

$$\|R\|=\sup\{R(x,a,y);\ x\in X,\ a\in A,y\in X\}。$$

由于假定 $R(x,a,y)$有界，故$\|R\|<\infty$。任固定N，任取X到A的可测映射$g(\cdot)$。令 $\varphi^*=(\varphi_0^*,\varphi_1^*,\cdots)$，其中

$$\varphi_n^*=\begin{cases}\varphi_n, & 当\ n\leqslant N,\\ g(x_n), & 当\ n>N。\end{cases}$$

易知

$$|S(\varphi^*,x)-S(\varphi,x)|\leqslant\frac{2}{1-\beta}\beta^N\|R\|。$$

取N满足

$$\frac{2}{1-\beta}\beta^N\|R\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

注意，$n\geqslant N$ 时，

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega R(x_n,a_n,x_{n+1})\mathrm{d}P_x^{\varphi^*}\\
&=\int_X P(\mathrm{d}x_1|x,\varphi_0)\int_X\cdots\int_X P(\mathrm{d}x_{N+1}|x_N,\varphi_N)\\
&\quad\times\int_X P(\mathrm{d}x_{N+2}|x_{N+1},g(x_{N+1}))\int_X\cdots\\
&\quad\int_X P(\mathrm{d}x_{n+1}|x_n,g(x_n))\times R(x_n,a_n,x_{n+1})\\
&=\int_X P(\mathrm{d}x_1|x,\varphi_0)\int_X\cdots\int_X P(\mathrm{d}x_N|x_{N-1},\varphi_{N-1})\\
&\quad\times h_n(x_N,\varphi_N)\\
&=\int_\Omega h_n(x_N,a_N)\mathrm{d}P_x^\varphi,
\end{aligned}$$

于是

$$S(\varphi^*,x)=\int_\Omega\sum_{n=0}^{N-1}\beta^nR(x_n,a_n,x_{n+1})\mathrm{d}P_x^\varphi+\int_\Omega h_N(x_N,a_N)\mathrm{d}P_x^\varphi,$$

这里

$$h_N(x_N,a_N)=\sum_{n=N}^{\infty}\beta^nh_n(x_N,a_N).$$

它是 x_N 的可测函数．根据引理3.1，有X到A的可测函数$f_N(\cdot)$，满足对一切 $a_N\in A$，

$$h_N(x_N,f_N(x_N))\geqslant h_N(x_N,a_N)-\frac{\varepsilon}{2^{N+1}}.$$

令

$$\phi=(\varphi_0,\cdots,\varphi_{N-1},f_N,g,g,\cdots).$$

这里 $f_N=f_N(x_N)$. 则

$$S(\varphi^*,x)\leqslant\int_\Omega\sum_{n=0}^{N-1}\beta^n R(x_n,a_n,x_{n+1})\mathrm{d}P_x^\varphi$$

$$+\int_\Omega h_N(x_N,f_N(x_N))\mathrm{d}P_x^\varphi+\frac{\varepsilon}{2^{N+1}}$$

$$=S(\tilde{\varphi},x)+\frac{\varepsilon}{2^{N+1}}.$$

同理有法则

$$\mathring{\varphi}=(\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_{N-2},f_{N-1},f_N,g,g,\cdots)$$

满足

$$S(\tilde{\varphi},x)\leqslant S(\mathring{\varphi},x)+\frac{\varepsilon}{2^N},$$

故依归纳法知有马氏型法则

$$\bar{\varphi}=(\varphi_0,f_1,f_2,\cdots,f_N,g,g,\cdots)$$

满足

$$S(\varphi^*,x)\leqslant S(\bar{\varphi},x)+\frac{\varepsilon}{2^2}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2^{N+1}}<S(\bar{\varphi},x)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

易知

$$S(\bar{\varphi},x)>S(\varphi,x)-\varepsilon.$$

定理3.1证毕.

设 $M(X)$ 为 X 上全体有界可测函数组成之集合，$f(x)$ 是 X 到 A 的可测映射. 定义算子:

$$T_f u(x)\triangleq\int_X[R(x,f(x),y)+\beta u(y)]P(\mathrm{d}y|x,f(x)).$$

直观意义是：采用平稳马氏型法则 $\varphi=(f,f,\cdots)$ 时，若开始时状态是 x，下一步到达状态 y，从这一步开始算起的平均报酬是 $u(y)$，则从开始的状态 x 算起的平均报酬是 $T_f u(x)$.

设 $\varphi=(\varphi_0,\varphi_1,\cdots)$ 是马氏型法则，其中 $\varphi_i=\varphi_i(x)$ $(i\geqslant0)$.

与 φ_i 相应的算子为 T_{φ_i}。令

$$U_\varphi u(x)=\sup_{i\geq 0} T_{\varphi_i}u(x) \quad (x\in X).$$

我们来研究算子 U_φ 的性质。

定义3.7 称 X 到 A 的可测映射 f 是由法则 φ 生成的，若存在 X 的分割 $X=\bigcup_{i=0}^{\infty} S_i\,(S_0,S_1,S_2,\cdots$，两两不相交)，满足：对一切 $i\geq 0$，

$$f(x)=\varphi_i(x) \quad (一切\ x\in S_i).$$

引理3.2 (1) U_φ 是单调的，即 $u\leq v$ 时 $U_\varphi u\leq U_\varphi v$ $(u,v\in M(X))$。

(2) 若 C 是常数，则 $U_\varphi(u+C)=U_\varphi u+\beta C$。

(3) 若 f 是由 φ 生成的，则 $T_f u\leq U_\varphi u$。

(4) 对任何 $u\in M(X),\varepsilon>0$，存在由 φ 生成的 f，满足

$$T_f u\geq U_\varphi u-\varepsilon.$$

证明 给定 $u,v\in M(X),u\leq v$。显然 $T_{\varphi_i}u\leq T_{\varphi_i}v$，故 $U_\varphi u\leq U_\varphi v$。由于 $T_{\varphi_i}C=\beta C$，故

$$U_\varphi(u+C)=U_\varphi u+\beta C.$$

设 f 是由 $\varphi=(\varphi_0,\varphi_1,\cdots)$ 生成的，则存在 $S_0,S_1,\cdots$ 两两不相交，满足 $\bigcup_{i=0}^{\infty} S_i=X$ 且对一切 $i\geq 0$，

$$f(x)=\varphi_i(x) \quad (x\in S_i).$$

当 $x\in S_n$ 时，

$$T_f u(x)=\int_X [R(x,\varphi_n(x),y)+\beta u(y)]P(\mathrm{d}y\,|\,x,\varphi_n(x))$$
$$=T_{\varphi_n}u(x).$$

故 $T_f u(x)\leq U_\varphi u(x)$。这就证明了(3)成立。

最后来证明(4)。令

$$S_n = \{x: \text{对一切 } i < n, T_{\varphi_i} u(x) < U_\varphi u(x) - \varepsilon,$$

但 $$T_{\varphi_n} u(x) \geq U_\varphi u(x) - \varepsilon\} \quad (n \geq 0).$$

定义函数 f 如下：当 $x \in S_n$ 时，令

$$f(x) = \varphi_n(x) \quad (n \geq 0).$$

显然，对任何 $u \in M(X), x \in X$，取 n 使得 $x \in S_n$，于是

$$T_f u(x) = T_{\varphi_n} u(x) \geq U_\varphi u(x) - \varepsilon.$$

引理3.2全部证毕。

引理3.3 算子 U_φ 在 $M(X)$ 中有唯一的不动点 u^*。

证明 当 $u \in M(X)$ 时，令 $\|u\| = \sup_x |u(x)|$。易知 $M(X)$ 关于这个范数是 Banach 空间。因为 $v \leq u + \|u - v\|$，

$$U_\varphi v \leq U_\varphi (u + \|u - v\|) = U_\varphi u + \beta \|u - v\|,$$

即有

$$U_\varphi v - U_\varphi u \leq \beta \|u - v\|.$$

交换 u, v 的位置知

$$\|U_\varphi u - U_\varphi v\| \leq \beta \|u - v\|.$$

故 U_φ 是压缩算子，从而 U_φ 有唯一的不动点 u^*，即 $U_\varphi u^* = u^*$，证毕。

定义3.8 设 $\varphi = (f_0, f_1, \cdots)$ 和 $\phi = (g_0, g_1, \cdots)$ 都是马氏型法则，如果每个 $g_i (i \geq 0)$ 都是由 φ 生成的，则称 ϕ 是由 φ 生成的。

引理3.4 设 $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \cdots)$ 是马氏型法则，$\phi = (g_0, g_1, \cdots)$ 是由 φ 生成的，u^* 是算子 U_φ 的不动点，则

$$S(\phi, x) \leq u^*(x) (x \in X), \tag{3.2}$$

而且对任何 $\varepsilon > 0$，有 φ 生成的 f 满足：

$$S(f^\infty, x) \geq u^*(x) - \varepsilon (x \in X), \tag{3.3}$$

这里 $f^\infty = (f, f, \cdots)$ 是平稳马氏型法则。

证明 首先证明一个结论：若 f 是 X 到 A 的可测映射，则

$$T_f S(\varphi, \cdot)(x) = S((f, \varphi), x) (x \in X),$$

这里 (f, φ) 表示马氏型法则 $(f, \varphi_0, \varphi_1, \cdots)$。

实际上，

$$S(\varphi,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n\int_X P(\mathrm{d}x_1|x,\varphi_0)\int_X\cdots$$

$$\int_X P(\mathrm{d}x_{n+1}|x_n,\varphi_n)R(x_n,\varphi_n(x_n),x_{n+1}),$$

于是

$$T_f S(\varphi,\cdot)(x)=\int_X [R(x,f(x),y)+\beta S(\varphi,y)]P(\mathrm{d}y|x,f(x))$$

$$=\int_X R(x,f(x),y)P(\mathrm{d}y|x,f(x))$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\beta^{n-1}\int_X P(\mathrm{d}y|x,f(x))$$

$$\cdot\int_X P(\mathrm{d}x_1|y,\varphi_0(y))\int_X\cdots\int_X P(\mathrm{d}x_{n+1}|x_n,\varphi_n(x_n))$$

$$\cdot R(x_n,\varphi_n(x_n),\ x_{n+1})$$

$$=S((f,\varphi),x).$$

设$\bar{\varphi}=(g_0,g_1,\cdots)$是由$\varphi$生成的。记

$$\bar{\varphi}^{(n)}=(g_n,g_{n+1},\cdots)(n\geqslant 0),$$

$$u_n(x)=S(\bar{\varphi}^{(n)},x),$$

则

$$S(\bar{\varphi},x)=T_{g_0}T_{g_1}\cdots T_{g_{n-1}}u_n(x).$$

由于 T_{g_i} 是压缩算子，则对于 U_φ 的不动点u^*有

$$\|T_{g_0}\cdots T_{g_{n-1}}u_n-T_{g_0}\cdots T_{g_{n-1}}u^*\|$$

$$\leqslant\beta(\|T_{g_1}\cdots T_{g_{n-1}}u_n-T_{g_1}\cdots T_{g_{n-1}}u^*\|)\leqslant\cdots$$

$$\leqslant\beta^n\|u_n-u^*\|\leqslant\beta^n\left(\frac{\|R\|}{1-\beta}+\|u^*\|\right),$$

于是

$$\lim_n\|S(\varphi,x)-T_{g_0}\cdots T_{g_{n-1}}u^*(x)\|=0.$$

但是
$$T_{g_0}\cdots T_{g_{n-1}}u^* = U_\varphi^n u^* = u^*.$$
于是
$$S(\bar{\varphi}, x) = u^*(x).$$
这就证明了(3.2)成立。

任意给定$\varepsilon>0$，取 $\varepsilon'=\varepsilon(1-\beta)$，从引理3.2知有$\varphi$生成的 f 满足：
$$T_f u^* \geq U_\varphi u^* - \varepsilon' = u^* - \varepsilon',$$
于是
$$T_f^2 u^* \geq T_f(u^* - \varepsilon') = T_f u^* - \beta\varepsilon', \cdots,$$
$$T_f^n u^* \geq u^* - \varepsilon'(1+\beta+\cdots+\beta^{n-1}).$$
但是$\lim\limits_n T_f^n u^*(x) = S(f^\infty, x)$，故
$$S(f^\infty, x) \geq u^*(x) - \varepsilon.$$
这就证明了(3.3)成立。引理3.4证毕。

记$\hat{u}(x) = \sup\limits_\varphi S(\varphi, x)$，这里$\varphi$是任意的控制法则。当 $f\equiv a\in A$时，我们定义 $T_a = T_f$。

定理3.2 若对任何$\varepsilon>0$存在ε最优法则，则$\hat{u}(x)$满足方程
$$\hat{u}(x) = \sup_{a\in A} T_a \hat{u}(x). \tag{3.4}$$

证明 在定理3.2的假设下，从定理3.1和引理3.4知，存在ε最优的平稳马氏型法则($\varepsilon>0$)，取 $\varepsilon=\frac{1}{n+1}$，有$\frac{1}{n+1}$最优的平稳马氏型法则 f_n^∞($n\geq 0$)，设$\varphi=(f_0, f_1, \cdots)$，$u^*$是$U_\varphi$的不动点。从(3.2)知
$$u^*(x) \geq S(f_n^\infty, x) \geq S(\varphi, x) - \frac{1}{n+1},$$
这里φ是任意法则。故 $u^*(x) \geq S(\varphi, x)$。利用(3.3)知 $u^*(x) = \hat{u}(x)$。故 $\hat{u}(x)$是可测的。

由于 $T_{f_n}u \leq \sup\limits_{a\in A} T_a u$，从而

$$u^* = U_\varphi u^* = \sup_{a \in A} T_a u^*.$$

另一方面，若 $a \in A$，从(3.3)知

$$T_a u^* \leqslant T_a \left(S(f_n, \cdot) + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= T_a(S(f_n, \cdot)) + \frac{\beta}{n+1} = S((a, f_n), \cdot) + \frac{\beta}{n+1},$$

这里(a, f_n)表示法则$(g, f_n, f_n, \cdots)$(其中$g \equiv a$)。故

$$T_a u^* \leqslant \hat{u} + \frac{\beta}{n+1} = u^* + \frac{\beta}{n+1}.$$

所以

$$T_a u^* \leqslant u^*, \quad \sup_a T_a u^* \leqslant u^*.$$

从而$u^* = \sup\limits_a T_a u^*$，但 $\hat{u} = u^*$，故(3.4)成立。证毕。

方程

$$u = \sup_{a \in A} T_a u (u \in M(X)) \tag{3.5}$$

叫做最优性方程。

定理3.3 为了法则 φ 是最优的，必须而且只须 φ 的平均报酬 $S(\varphi, x)$满足最优性方程。

证明 充分性。若 $S(\varphi, x)$满足最优性方程，则

$$T_a S(\varphi, \cdot) \leqslant S(\varphi, \cdot) (a \in A).$$

从定理3.1和引理3.4，有平稳法则f^∞满足：

$$S(f^\infty, x) \geqslant \hat{u}(x) - \varepsilon. \tag{3.6}$$

由于$T_f S(\varphi, \cdot) \leqslant S(\varphi, \cdot)$，于是

$$S(\varphi, \cdot) \geqslant T_f^n S(\varphi, \cdot).$$

我们指出，对任何 $u \in M(X)$，

$$\lim_n T_f^n u = S(f^\infty, \cdot). \tag{3.7}$$

实际上，

$$\|T_f^n u - S(f^\infty, \cdot)\| = \|T_f^n u - T_f^n S(f^\infty, \cdot)\| \leqslant \beta^n \|u - S(f^\infty, \cdot)\|,$$

故(3.7)成立。于是

$$S(\varphi,x)\geq S(f^{\infty},x)\geq \bar{u}(x)-\varepsilon.$$

令$\varepsilon\to 0$知$S(\varphi,x)=\bar{u}(x)$。这表明φ是最优的。

必要性．设φ最优法则，则$S(\varphi,x)=\bar{u}(x)$。根据定理3.2知$S(\varphi,x)$满足最优性方程。证毕。

定理3.4 设行动空间$A=\{1,2,\cdots\}$(可数集)，则对任何$\varepsilon>0$，存在ε最优的而且是平稳马氏型的法则。

证明 令$\Phi=(g_0,g_1,\cdots)$，这$g_n=n+1(n\geq 0)$。设u^*是算子U_Φ的不动点。根据引理3.4，对$\varepsilon>0$有Φ生成的f满足：

$$S(f^{\infty},x)\geq u^*(x)-\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.8}$$

任意给定控制法则φ，根据定理3.1，有马氏型法则$\varphi^*=(f_0,f_1,\cdots)$，使得

$$\|S(\varphi^*,x)-S(\varphi,x)\|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.9}$$

但马氏型法则φ^*是由Φ生成的，根据引理3.4知

$$S(\varphi^*,x)\leq u^*(x). \tag{3.10}$$

从(3.8)、(3.9)和(3.10)得

$$S(f^{\infty},x)\geq S(\varphi,x)-\varepsilon,$$

于是

$$S(f^{\infty},x)\geq\sup_{\varphi}S(\varphi,x)-\varepsilon.$$

这表明f^{∞}是ε最优的法则。证毕。

定理3.5 设行动空间A是有限集，则存在最优的且平稳马氏型的法则。

证明 不妨设$A=\{1,2,\cdots,k\}$(k是正整数)。当$n\equiv j\pmod k$$(0\leq j\leq k-1)$时，令$g_n=j+1$，$\Phi=(g_0,g_1,g_2,\cdots)$。设$u^*$是算子$U_\Phi$的不动点。易知

$$U_\Phi u^*=\sup_{0\leq n\leq k-1}T_{g_n}u^*.$$

令

$$B_n = \{x:\ T_{g_n} u^*(x) = U_\varphi u^*(x),\ 但是对一切$$

$$i < n,\ T_{g_i} u^*(x) < U_\varphi u^*(x)\}$$

$(n=0,1,\cdots,k-1)$，则$X = \bigcup_{n=0}^{k-1} B_n$。当$x \in B_n$时，令

$$f(x) = g_n(x)\ (0 \leq n \leq k-1)。$$

我们来证明f^∞是最优的法则。实际上，容易看出

$$T_f u^*(x) = U_\varphi u^*(x) = u^*(x),$$

即u^*是T_f的不动点。于是

$$T_f^n u^*(x) = u^*(x)。$$

从(3.7)知

$$\lim_n T_f^n u^*(x) = S(f^\infty, x),$$

故

$$u^*(x) = S(f^\infty, x)。$$

设φ是任何控制法则，$\varepsilon > 0$，从定理3.1知有马氏型法则φ^*，满足

$$\|S(\varphi^*, x) - S(\varphi, x)\| < \varepsilon。\qquad (3.11)$$

易知φ^*是由φ生成的。从引理3.4推知

$$S(\varphi^*, x) \leq u^*(x)。\qquad (3.12)$$

从(3.11)和(3.12)知

$$S(f^\infty, x) \geq S(\varphi, x) - \varepsilon。$$

令$\varepsilon \to 0$得

$$S(f^\infty, x) \geq S(\varphi, x)。$$

这就证明了f^∞是最优的法则。定理3.5证毕。

定理3.5告诉我们，当行动空间是有限集时，确有一个平稳马氏型法则是最优控制法则。怎样找出这个最优法则呢？这是一个算法问题，现代有大量研究。当状态空间也是有限集时，确有一些有效的迭代算法，读者如有兴趣可参阅 Howard(1960)和董泽清(1981)的书。至于更一般的序贯选择过程(一般叫序贯控制

过程或可控随机过程)，例如行动空间是不可数集或者转移规律涉及系统的全部历史，现代也有很多研究。由于涉及到集合和函数可测性的精细处理，数学上有较大的复杂性，读者可去看下列专著Е.Б.Дынкин и юшкевич(1975)，K. M. Van Hee(1978)和ГИХМАН И Скороход (1977)。

§4 备择Bandit过程与Gittins定理

我们先对本节要讨论的选择问题进行直观描述，然后再建立明确的数学模型，论述有关的定理。

设想有k个机器($k\geqslant 2$)，分别记为$1,2,\cdots,k$。设$x_i(t)$表示时刻 t 机器 i 的状态($1\leqslant i\leqslant k$, $t=0,1,2,\cdots$),

$$x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t))$$

表示 k 个机器所构成的“系统”的状态。在每个时刻，人们必须而且只能操纵一个机器，若在时刻 t 被操纵的机器是 $i(t)$ ($1\leqslant i(t)\leqslant k$)，我们有下列假定：

若时刻 t “系统”的状态为 $x(t)=(x_1(t),\cdots,x_k(t))$，而 $i(t)=i$，则$j\neq i$时，$x_j(t+1)=x_j(t)$，而机器 i 则按齐次马氏链规律$P(dy|x_i,i)$从状态$x_i(t)$转移到 $x_i(t+1)$。“系统”从$x(t)$转移到$x(t+1)$后得到的报酬是$\beta^t R(x(t),i(t),x(t-1))$，这里$R(x(t),i(t),x(t+1))=R_{i(t)}(x_{i(t)}(t),x_{i(t)}(t+1))$，$0<\beta<1$。换句话说，若机器 i 被操纵，则得到报酬 $\beta^t R_{i(t)}(x_{i(t)}(t), x_{i(t)}(t+1))$，未被操纵的机器不提供报酬。$\beta^t R(x(t),i(t), x(t+1))$是时刻 t 各机器的报酬的总和。

我们自然提出下列问题：如果转移概率函数 $P(B|x_i,i)$，报酬函数$R(\cdot,\cdot;\cdot)$及折扣因子β 都知道了，则从初始状态出发，应该在各个时刻如何选择机器进行操纵，以使得该系统在演变过程中(从时刻0 开始无限进行下去)所得到的平均总报酬达到最大？

这个问题叫做 Bandit 过程的选择问题。每个机器的状态演

变过程称之为 Bandit 过程。在每个时刻该机器或者被操纵从状态转移到新的状态且获得一定的报酬，或者未被操纵因而状态保持不变，报酬是0。

这个问题从四十年代就提了出来，一直有人研究，直到1974年 Gittins 和他的合作者的工作出现，研究工作才有了实质性的突破。他们后来的一系列文章改进了这一研究，读者可参阅 Gittins (1979)。他们的主要结论可粗略地描述如下：

对每个机器 i 及其在时刻 t 的状态 $x_i(t)$，对应一个指标 $\gamma_i(x_i(t))$(所谓 Gittins 指标，它与机器 i 及其状态有关，但不直接依赖于 t)。最优的选择法则(即使总报酬的平均值达到最大的选择法则)是：在时刻 t 选择指标最大的机器 $i(t)$ 进行操纵(即 $\gamma_{i(t)}=\max\limits_{1\le j\le k}\gamma_j(x_j(t))$)。而指标 γ_i 的计算只涉及到机器 i 及某个标准机器之间的选择问题，与其它的 $k-1$ 个机器无关。

这个结论现在通称为 Gittins 定理。Gittins 的原始证明相当烦难，数学上也不够清晰，下面的叙述是基于 P. Whittle(1980)的工作，但处理的模型更广泛些。

我们的出发点是一族集合

$$\{X_i, P(\cdot|x_i, i), R_i, \beta\}(i\in A),$$

其含义如下：

① $A=\{1,2,\cdots,k\}$ 是一有限集(A 的元可看作机器的代号)。A 中指定了一个 σ 代数 $\mathscr{U}$，它由 A 的一切子集组成。

② 对每个 $i\in A$，X_i 是一个非空集(X_i 的元可看成机器 i 的状态)。在 X_i 中指定了一个 σ 代数 $\mathscr{B}_i$，$\mathscr{B}_i$ 包含 X_i 的所有单点集。

③ $P(B|x_i, i)$ 是转移函数——对一切 $x\in X_i$，$i\in A$，$P(\cdot|x,i)$ 是 $\mathscr{B}_i$ 上的概率测度；对一切 $i\in A, B\in\mathscr{B}_i, P(B|\cdot,i)$ 是 $\mathscr{B}_i$ 可测的。

④ $R_i=R_i(x_i, y_i)$ 是报酬函数——对一切 $i\in A$，$R_i(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathscr{B}_i\otimes\mathscr{B}_i$ 可测的有界函数。我们恒设它满足

$$-\infty < A \leqslant R_i(x,y) \leqslant B < \infty, \tag{4.1}$$

这里A,B与i,x,y无关。

⑤ β是折扣因子，$0<\beta<1$。

所述的集合族

$$\{X_i, P(\cdot|X_i,i), R_i, \beta\} \ (i \in A)$$

称为备择 Bandit 过程。

为了寻求最优的选择法则，我们可以把这个集合族纳入上节讲过的马尔可夫折扣模型。令

$X = X_1 \times \cdots \times X_k$， $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{B}_k$(乘积$\sigma$代数)，

X称为系统的状态空间。定义转移函数

$$\tilde{P}(B|(x_1,\cdots,x_k),i)(B \in \mathscr{B},(x_1,\cdots,x_k) \in X, i \in A)$$

满足：当$B = B_1 \times \cdots \times B_k$时，对一切$B_j \in \mathscr{B}_j$，$x_j \in X_j$，$j \in A$，

$$\tilde{P}(B_1 \times \cdots \times B_k|(x_1,\cdots,x_k),i) = \prod_{j \neq i} I_{B_j}(x_j) \cdot P(B_i|x_i,i).$$

规定报酬函数

$$R((x_1,\cdots,x_k),i,(y_1,\cdots,y_k)) \triangleq R_i(x_i,y_i)(i=1,\cdots,k).$$

所得的五元集$(X,A,\tilde{P}(\cdot|x,i),R,\beta)$便是§3中的马尔可夫折扣模型。像在§3中一样，可以建立相应的概率空间。重述如下：

$$\Omega = X \times A \times X \times A \times \cdots,$$

$$\mathscr{F} = \mathscr{B} \otimes \mathscr{U} \otimes \mathscr{B} \otimes \mathscr{U} \otimes \cdots.$$

所谓控制法则(即选择法则)是指这样的序列$\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \cdots)$，其中$\varphi_n$是$((X \times A)^n \times X, (\mathscr{B} \otimes \mathscr{U})^n \otimes \mathscr{B})$到$(A, \mathscr{U})$的可测映射($n \geqslant 0$)。在$\Omega$上定义函数$\xi_n, \eta_n$如下：记

$$x(n) = (x_1(n), x_2(n), \cdots, x_k(n))(n \geqslant 0, x_i(n) \in X_i).$$

当$\omega = (x(0), i_0, x(1), i_1, \cdots) \in \Omega$时，令

$$\xi_n(\omega) = x(n), \qquad \eta_n(\omega) = i_n(n \geqslant 0).$$

对于控制法则φ及状态$x = (x_1, \cdots, x_k) \in X$，在$\mathscr{F}$上定义概率测度$P_x^\varphi$满足：

$$P_x^{\varphi}\{\omega:\ \xi_0\in B_0,\eta_0\in C_0,\cdots,\xi_n\in B_n,\eta_n\in C_n\}$$

$$=I_{B_0}(x)I_{C_0}(\varphi_0(x))\int_{B_0}P(\mathrm{d}x(1)\,|\,x,\varphi_0(x))I_{C_1}(\varphi_1)\int_{B_1}\cdots$$

$$\cdot\int_{B_{n-1}}\tilde{P}(\mathrm{d}x(n-1)\,;\,x(n-2),\varphi_{n-2})I_{C_{n-1}}(\varphi_{n-1})$$

$$\cdot\int_{B_n}\tilde{P}(\mathrm{d}x(n)\,|\,x(n-1),\varphi_{n-1})I_{C_n}(\varphi_n),$$

这里$n\geqslant 0$，$B_n\in\mathscr{B}$，$C_n\in\mathscr{U}$。与测度P_x^{φ}相应的数学期望符号为E_x^{φ}。不难看出，

$$P_x^{\varphi}\{\xi_{n+1}\in B_{n+1}\,|\,\xi_0,\eta_0,\cdots,\xi_n,\eta_n\}$$
$$=\tilde{P}(B_{n+1}\,|\,\xi_n,\eta_n)(\text{a.s. } P_x^{\varphi}),$$

$$P_x^{\varphi}\{\eta_{n+1}\in C_{n+1}\,|\,\xi_0,\eta_0,\cdots,\xi_n,\eta_n,\xi_{n+1}\}$$
$$=I_{C_{n+1}}[\varphi_{n+1}(\xi_0,\eta_0,\cdots,\xi_n,\eta_n,\xi_{n+1})](\text{a.s. } P_x^{\varphi}).$$

平均报酬是

$$S(\varphi,x)\triangleq\int_{\Omega}\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n R_{\varphi_n}(x_{\varphi_n}(n),x_{\varphi_n}(n+1))\mathrm{d}P_x^{\varphi}(x\in X).$$

所谓法则φ^*是最优的，是指对一切法则φ及$x\in X$，有

$$S(\varphi^*,x)\geqslant S(\varphi;x).$$

由于A是有限集，根据定理3.5，一定存在最优的而且是平稳马氏型的法则。本节的主要任务是证明：Gittins的“指标法则”就是最优法则。

令

$$G(x)\triangleq\sup_{\varphi}S(\varphi,x),\tag{4.2}$$

$$T_i u(x)=\int_X[R(x,i,y)+\beta u(y)]\tilde{P}(\mathrm{d}y\,|\,x,i),\tag{4.3}$$

这里$x=(x_1,\cdots,x_k)\in X$，$1\leqslant i\leqslant k$。从本章定理3.3知

$$G(x)=\max_{1\leqslant i\leqslant k}T_iG(x).\tag{4.4}$$

我们对行动空间$A=\{1,2,\cdots,k\}$添加一个元素$k+1$(含义是

"退休"，即不操纵任何机器)。$\hat{A}\triangleq\{1,2,\cdots,k+1\}$。我们来考察扩大的选择模型。当 $B\in\mathscr{B}$，$x\in X$，$u\in A=\{1,\cdots,k\}$时，令

$$\hat{P}(B|x,u)=P(B|x,u);$$

当 $B\in\mathscr{B}$,$x\in X$时，令

$$\hat{P}(B|x,k+1)=I_B(x);$$

当 $u\in A$时，令

$$\hat{R}(x,u,y)=R(x,u,y),$$

但规定

$$\hat{R}(x,k+1,y)=(1-\beta)M,$$

这里M是一个常数。对于折扣模型

$$\hat{\mathscr{P}}=(X,\hat{A},\hat{P}(B|x,u),\hat{R},\beta),$$

从定理 3.5 知，存在最优的且平稳马氏型的法则 φ。不难看出，对于任何马氏型法则φ，有

$$S(\varphi,x)=E_x^{\varphi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n\hat{R}(x(n),\varphi_n,x(n+1))\right)$$

$$=E_x^{\varphi}\left(\sum_{n=0}^{\tau-1}\beta^nR(x(n),\varphi_n,x(n+1))+\beta^{\tau}M\right)①,$$

其中

$$\tau=\inf\{n:\ \varphi_n=k+1\}.$$

这个扩大了的模型$\hat{\mathscr{P}}$叫做M模型。令

$$\phi(x,M)=\sup_{\varphi}S(\varphi,x),$$

φ是M模型的任意控制法则.

$$\hat{T}_iu(x)=\int_X[\hat{R}(x,i,y)+\beta u(y)]\hat{P}(dy|x,i),$$

$1\leqslant i\leqslant k+1$。从定理 3.3 知

$$\phi(x,M)=\max_{1\leqslant i\leqslant k+1}\hat{T}_i\phi(\cdot,M)(x).\qquad(4.5)$$

---

① 我们应对模型$\hat{\mathscr{P}}$建立相应的概率空间。这里及下面的 P_x^{φ}，E_x^{φ}都是关于这个扩大的概率空间而言的。

引理4.1 $\phi(x,M)$是M的不减凸函数，且

$$\phi(x,M)=\begin{cases}G(x), & \text{当} M\leqslant \frac{A}{1-\beta},\\ M, & \text{当} M\geqslant \frac{B}{1-\beta},\end{cases}$$

这里A,B满足(4.1)，$G(x)$的定义见(4.2)。

证明 从定义知$\phi(x,M)$是M的不减函数。设$\varphi=(\varphi_0,\varphi_1,\cdots)$是任何马氏型控制法则(关于$M$模型)，令

$$\tau=\inf\{n;\ \varphi_n=k+1\},$$

则

$$S(\varphi,x)=E_x^{\varphi}\left(\sum_{n=0}^{\tau-1}\beta^n R(x(n),\varphi_n,x(n+1))+\beta^{\tau}M.\right)$$

当$M\geqslant\frac{B}{1-\beta}$时，

$$S(\varphi,x)\leqslant E_x^{\varphi}\left((1-\beta)M\cdot\sum_{n=0}^{\tau-1}\beta^n+\beta^{\tau}M\right)=M.$$

从本章定理3.1知$\phi(x,M)\leqslant M$。另一方面，若取$f\equiv k+1$，$\bar{\varphi}=f^{\infty}$，则$S(\bar{\varphi},x)=M$，故$\phi(x,M)=M$。

当$M\leqslant\frac{A}{1-\beta}$时，令

$$\bar{\varphi}_i=\min(\varphi_i,k),\quad i=0,1,\cdots,$$
$$\bar{\varphi}=(\bar{\varphi}_0,\bar{\varphi}_1,\cdots),$$

则

$$\begin{aligned}S(\bar{\varphi},x)=&\ E_x^{\varphi}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1}\beta^n R(x(n),\varphi_n,x(n+1))\right.\\ &\left.+\sum_{n=\tau}^{\infty}\beta^n R(x(n),\bar{\varphi}_n,x(n+1))\right]\\ \geqslant&\ E_x^{\varphi}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1}\beta^n R(x(n),\varphi_n,x(n+1))+\sum_{n=\tau}^{\infty}\beta^n A\right]\end{aligned}$$

$$\geqslant E_x^{\varphi}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1}\beta^n R(x(n),\varphi_n,x(n+1))+\beta^{\tau}M\right]$$

$$=S(\varphi,x),$$

故

$$G(x)\geqslant\phi(x,M),$$

从而

$$\phi(x,M)=G(x).$$

最后指出 $\phi(x,M)$ 是 M 的连续凸函数。任意给定 $M_1<M_2$，$0<\lambda<1$，令

$$M=\lambda M_1+(1-\lambda)M_2$$

设 φ 是 M 模型的最优控制法则，

$$\tau=\inf\{n:\ \varphi_n=k+1\},$$

这里 $\varphi=(\varphi_0,\varphi_1,\cdots)$，则

$$\phi(x,M)=E_x^{\varphi}\left(\sum_{n=0}^{\tau-1}\beta^n R(x(n),\varphi_n,x(n+1))\right)+ME_x^{\varphi}\beta^{\tau}.$$

由于

$$\phi(x,M_i)$$

$$\geqslant E_x^{\varphi}\left(\sum_{0}^{\tau-1}\beta^n R(x(n),\varphi_n,x(n+1))\right)+M_i E_x^{\varphi}\beta^{\tau}(i=1,2),$$

于是

$$\lambda\phi(x,M_1)+(1-\lambda)\phi(x,M_2)$$

$$\geqslant E_x^{\varphi}\left(\sum_{n=0}^{\tau-1}\beta^n R(x(n),\varphi_n,x(n+1))\right)$$

$$+(\lambda M_1+(1-\lambda)M_2)E_x^{\varphi}\beta^{\tau}$$

$$=\phi(x,M).$$

这就证明了 $\phi(x,M)$ 是 M 的凸函数。不减凸函数一定连续。引理4.1证毕。

在刚才的讨论中，可供选择的机器有 k 个，在每个时刻可供选择的行动有 $k+1$ 个。现在来考察只有两个行动可供选择的情形。任意固定 $i\in A$，研究行动空间 $A_i\triangleq\{i,k+1\}$（直观意义是：

每个时刻或者操纵机器 i 或者不操纵机器 i，一旦不操纵机器 i，则机器 i 的状态往后就不改变了)。此时的最大的平均报酬记作$\phi_i(x_i,M)(i=1,\cdots,k)$，这里$x_i$是机器 i 的初始状态。从引理 4.1 知，$\phi_i(x_i,M)$是 M 的连续凸函数，而且 $M\geqslant\frac{B}{1-\beta}$时，$\phi_i(x_i,M)=M$。

定义4.1 称

$$M_i(x_i)=\inf\{M:\ \phi_i(x_i,M)=M\}$$

$(i=1,\cdots,k)$为机器 i 在状态 x_i时的 Gittins 指标。

从引理4.1 知，当 $M<\frac{A}{1-\beta}$ 时，$\phi_i(x_i,M)>M$，故$M_i(x_i)$是一个实数，且

$$\phi_i(x_i,M_i(x_i))=M_i(x_i)。\tag{4.6}$$

记 $M(X_i)$为 X_i 上全体有界可测函数组成的集合。对任何 $u\in M(X_i)$，令

$$(T_iu)(x_i)\triangleq\int_{X_i}[R_i(x_i,y)+\beta u(y)]P(\mathrm{d}y|x_i,i),$$

$i=1,2,\cdots,k$。

$$(T_{k+1}^a u)(x_i)\triangleq(1-\beta)a+\beta u(x_i)(x_i\in X_i),$$

易知

$$(T_{k+1}^{M_i(x_i)}\phi(\cdot,M_i(x_i)))(x_i)=M_i(x_i)。$$

从定理 3.3 得

$$\phi_i(x_i,M_i(x_i))=\max(M_i(x_i),(T_i\phi_i(\cdot M_i(x_i)))(x_i))。\tag{4.7}$$

引理4.2

$$M_i(x_i)=(T_i\phi_i(\cdot,M_i(x_i)))(x_i)(i=1,\cdots,k)。$$

证明 记

$$\lambda=(T_i\phi_i(\cdot,M_i(x_i)))(x_i)。$$

从（4.7）知只须证 $M_i(x_i)\leqslant\lambda$。用反证法。设 $M_i(x_i)>\lambda$。取

$a\in(\lambda,M_i(x_i))$。易知

$$(T_i\phi_i(\cdot,a))(x_i)\leqslant(T_i\phi_i(\cdot,M_i(x_i)))(x_i)=\lambda<a,$$

于是

$$\begin{aligned}\phi_i(x_i,a)&=\max((T_i\phi_i(\cdot,a))(x_i),(T^a_{k+1}\phi_i(\cdot,a))(x_i))\\&\leqslant\max(a,(1-\beta)a+\beta\phi_i(x_i,a)).\end{aligned}$$

但 $\phi_i(x_i,a)\geqslant a$，于是 $\phi_i(x_i,a)=a$，这与 $a<M_i(x_i)$ 相矛盾。引理 4.2 证毕。

引理4.3

$$M_i(x_i)=\sup_{\varphi}\frac{E^{\varphi}_{x_i}\left\{\sum_{n=0}^{\tau-1}\beta^nR_i(x_i(n),x_i(n+1))\right\}}{1-E^{\varphi}_{x_i}\beta^{\tau}},\tag{4.8}$$

这里$1\leqslant i\leqslant k$，φ 是任意的马氏型法则（对于行动空间 $A_i=\{i,k+1\}$而言！），$\tau=\inf\{n:\ \varphi_n=k+1\}$（这里 $\varphi=(\varphi_0,\varphi_1,\cdots)$），$E^{\varphi}_{x_i}$ 表示机器 i 的初始状态是 x_i 控制法则是 φ 的条件下的数学期望符号。

证明 显然，

$$\phi_i(x_i,M)\geqslant E^{\varphi}_{x_i}\left\{\sum_{n=0}^{\tau-1}\beta^nR_i(x_i(n),x_i(n+1))+\beta^{\tau}M\right\}.\tag{4.9}$$

在此式中令 $M=M_i(x_i)$，得

$$M_i(x_i)[1-E^{\varphi}_{x_i}\beta^{\tau}]\geqslant E^{\varphi}_{x_i}\left\{\sum_{n=0}^{\tau-1}\beta^nR_i(x_i(n),x_i(n+1))\right\},$$

于是

$$M_i(x_i)\geqslant\sup_{\varphi}\frac{E^{\varphi}_{x_i}\left\{\sum_{n=0}^{\tau-1}\beta^nR_i(x_i(n),x_i(n+1))\right\}}{1-E^{\varphi}_{x_i}\beta^{\tau}},$$

取马氏型法则 $\varphi^*=(\varphi^*_0,\varphi^*_1,\cdots)$（记 $\tau^*=\inf\{n:\ \varphi^*_n=k+1\}$），使（4.9）中等号成立，于是不难推知（4.8)成立。引理 4.3 证毕。

定义4.2 设

$$f(x_1,\cdots,x_k)=\min\{i:\ M_i(x_i)=\max(M_j(x_j);\ j=1,2,\cdots,k)\},$$

则称平稳法则 $\varphi=f^{\infty}$ 为 Gittins 指标法则（简称指标法则）.

为了证明指标法则的最优性，引进函数

$$\hat{\phi}(x,M)\triangleq B_1-\int_M^{B_1}\prod_{i=1}^{k}\frac{\partial\phi_i(x_i,m)}{\partial m}\mathrm{d}m,$$

这里 $B_1=\dfrac{B}{1-\beta}$（B 的定义见(4.1)），$\dfrac{\partial\phi_i}{\partial m}$ 理解为右导数。

我们将证明 $\hat{\phi}(x,M)=\phi(x,M)$。

引理4.4 $\hat{\phi}(x,M)=\phi_i(x_i,M)P_i(x,M)$

$$+\int_M^{\infty}\phi_i(x_i,m)\mathrm{d}_mP_i(x,m),\qquad(4.10)$$

这里

$$x=(x_1,\cdots,x_k),\quad P_i(x,m)\triangleq\prod_{j\neq i}\frac{\partial\phi_j(x_j,m)}{\partial m}.$$

证明 当 $M\geqslant B_1$ 时，$\phi_j(x_j,M)=M$，故 $M\geqslant B_1$ 时，$P_i(x,M)\equiv1$，从而

$$\int_M^{\infty}\phi_i(x_i,m)\mathrm{d}_mP_i(x,m)=0.$$

于是(4.10)的右端等于 M。另一方面，

$$\hat{\phi}(x,M)\triangleq B_1-\int_M^{B_1}\prod_{j=1}^{k}\frac{\partial\phi_j}{\partial m}\mathrm{d}m=B_1+\int_{B_1}^{M}1\mathrm{d}m=M,$$

故 $M\geqslant B_1$ 时(4.10)成立。下面设 $M<B_1$，此时

$$\hat{\phi}(x,M)=B_1-\int_M^{B_1}\frac{\partial\phi_i}{\partial m}P_i(x,m)\mathrm{d}m$$

$$=B_1-[\phi_i(x_i,m)P_i(x,m)]\Big|_M^{B_1}+\int_M^{B_1}\phi_i(x_i,m)\mathrm{d}_mP_i(x,m)$$

$$=\phi_i(x_i,M)P_i(x,M)+\int_M^{B_1}\phi_i(x_i,m)\mathrm{d}_mP_i(x,m),$$

故(4.10)也成立。证毕。

令

$$\delta_i=\delta_i(x_i,M)=\phi_i(x_i,M)-(T_i\phi_i(\cdot,M))(x_i),$$

则 $\delta_i\geqslant 0$。我们说当 $M\leqslant M_i(x_i)$ 时，$\delta_i=0$。实际上，若有 $M^*<M_i(x_i)$，使得 $\delta_i(x_i,M^*)>0$，则

$$\phi_i(x_i,M^*)>(T_i\phi_i(\cdot,M^*))(x_i),$$

从而

$$\phi_i(x_i,M^*)=(1-\beta)M^*+\beta\phi_i(x_i,M^*),$$

于是 $\phi_i(x_i,M^*)=M^*$，这与 $M_i(x_i)$的定义相矛盾。故对一切 $M\leqslant M_i(x_i),\delta_i=0$。

引理4.5 设 $x=(x_1,\cdots,x_k)\in X$，则有下列结论：

(1) $\hat\phi(x,M)\geqslant M$ 而且 $M\geqslant \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k} M_j(x_j)$时，$\hat\phi(x,M)=M$·

(2) $\hat\phi(x,M)\geqslant(\hat T_i\hat\phi(\cdot M))(x)$。 (4.11)

(3) 当

$$M\leqslant M_i(x_i)=\max\{M_j(x_j);\ j=1,2,\cdots,k\}$$

时，(4.11) 中等号成立。

证明 (1) 记 $a_i=\max\limits_{j\neq i}M_j(x_j)$，当 $M\geqslant a_i$ 时，$P_i(x,M)=1$。从引理 4.4 知

$$\hat\phi(x,M)=\phi_i(x_i,M)\geqslant M;$$

当 $M<a_i$ 时，

$$\hat\phi(x,M)=\phi_i(x_i,M)P_i(x,M)+\int_M^\infty \phi_i(x_i,m)\mathrm{d}_mP_i(x,m)$$

$$\geqslant\phi_i(x_i,M)P_i(x,M)+\int_M^{a_i}\phi_i(x_i,m)\mathrm{d}_mP_i(x,m)$$

$$=\phi_i(x_i,M)P_i(x,M)+\phi_i(x_i,M)[P_i(x,a_i)-P_i(x,M)]$$

$$=\phi_i(x_i,M)\geqslant M.$$

总之 $\hat\phi(x,M)\geqslant M$。

当 $M\geqslant\max\limits_j M_j(x_j)$时，$\hat\phi(x,M)=\phi_i(x,M)=M$(因为 $\phi_i(x,M)$

$-M$ 是M的减函数)。

(2) 从引理 4.4 知

$$\hat{\phi}(x,M)=\phi_i(x_i,M)P_i(x,M)+\int_M^\infty \phi_i(x_i,m)\mathrm{d}_m P_i(x,m),$$

于是

$$\begin{aligned}
&(\hat{T}_i\hat{\phi}(\cdot,M))(x_i)\\
&=\int_X[\hat{R}(x,i,y)+\beta\hat{\phi}(y,M)]\hat{P}(\mathrm{d}y\,|\,x,i)\\
&=\int_{X_i}[R_i(x_i,y_i)+\beta P_i(x,M)\cdot\phi_i(y_i,M)]P(\mathrm{d}y_i\,|\,x_i,i)\\
&\quad+\beta\int_M^\infty\left[\int_{X_i}\phi_i(y_i,m)P(\mathrm{d}y_i\,|\,x_i,i)\right]\mathrm{d}_m P_i(x,m)\\
&=\int_{X_i}R_i(x_i,y_i)P(\mathrm{d}y_i\,|\,x_i,i)\\
&\quad+P_i(x,M)(T_i\phi_i(\cdot,M))(x_i)\\
&\quad-\int_{X_i}R_i(x_i,y_i)P_i(x,M)P(\mathrm{d}y_i\,|\,x_i,i)\\
&\quad+\int_M^\infty(T_i\phi_i(\cdot,M))(x_i)\mathrm{d}_m P_i(x,m)\\
&\quad-\int_M^\infty\int_{X_i}R_i(x_i,y_i)P(\mathrm{d}y_i\,|\,x_i,i)\mathrm{d}_m P_i(x,m)\\
&=P_i(x,M)(T_i\phi_i(\cdot,M))(x_i)\\
&\quad+\int_M^\infty(T_i\phi_i(\cdot,M))(x_i)\mathrm{d}_m P_i(x,m).
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(x,M)-(\hat{T}_i\hat{\phi}(\cdot,M))(x)&=\delta_i(x_i,M)P_i(x,M)\\
&\quad+\int_M^\infty\delta_i(x_i,m)\mathrm{d}_m P_i(x,m)\geqslant 0.
\end{aligned}$$

这就证明了(4.11)成立。

(3) 当 $M\leqslant M_i(x_i)$时

$$\delta_i(x_i, M) = 0.$$

当 $M \geqslant a_i = \max_{j \neq i} M_j(x_j)$时，

$$P_i(x, M) \equiv 1,$$

当 $M < a_i \leqslant M_i(x_i)$时，

$$\int_M^\infty \delta_i(x_i, m) \mathrm{d}_m P_i(x, m) = \int_M^{a_i} 0 \mathrm{d}_m P_i(x, m) = 0,$$

故只要

$$M \leqslant M_i(x_i) = \max\{M_j(x_j): \ j = 1, \cdots, k\};$$

(4.11)中等号成立。引理 4.5 全部证毕。

引理4.6 $\hat{\phi}(x, M) = \phi(x, M)$。

证明 固定M，$\hat{\phi}(x, M)$和$\phi(x, M)$都是x的有界函数且满足同样的方程：

$$\hat{\phi} = \max_{1 \leqslant i \leqslant k+1} \hat{T}_i \hat{\phi}, \quad \phi = \max_{1 \leqslant i \leqslant k+1} \hat{T}_i \phi,$$

这里

$$(\hat{T}_i u)(x) = \int_X [\hat{R}(x, i, y) + \beta u(y)] \hat{P}(\mathrm{d}y | x, i)$$

$$i = 1, \cdots, k+1.$$

令 $h(x, M) = \hat{\phi} - \phi$，则

$$|h(x, M)| \leqslant \beta \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \int_X |h(x, M)| \hat{P}(\mathrm{d}y | x, i)$$

$$\leqslant \beta \sup_{x \in X} |h(x, M)|,$$

于是 $h(x, M) \equiv 0$，从而

$$\hat{\phi}(x, M) = \phi(x, M).$$

引理 4.6 证毕。

定理4.1 (Gittins, 1979) Gittins 指标法则是最优控制法则。

证明 设 $\varphi = f^\infty$ 是 Gittins 指标法则，这里

$$f(x)=f(x_1,\cdots,x_k)=\min\{i:\ M_i(x_i)=\max_{1\leq j\leq k} M_j(x_j)\}.$$

我们来证明

$$S(\phi,x)=G(x)(一切\ x\in X),$$

这里 $G(x)=\sup\limits_{\varphi}S(\varphi,x)$，$\varphi$ 是任意的控制法则．任意给定 $M<\frac{A}{1-\beta}$，则

$$\max_{1\leq j\leq k} M_j(x_j)>M.$$

实际上，从(4.8)知

$$M_i(x_i)\geqslant A\sup_{\varphi}\left\{\frac{E_{x_i}^{\varphi}\left(\sum\limits_{0}^{\tau-1}\beta^n\right)}{1-E_{x_i}^{\varphi}\beta^{\tau}}\right\}=\frac{A}{1-\beta}>M.$$

于是从引理 4.5 知，只要 $M_i(x_i)$是 $M_1(x_1),\cdots,M_k(x_k)$ 中最大的，则

$$\phi(x,M)=(\hat{T}_i\hat{\phi}(\cdot,M))(x),$$

从而有

$$\hat{\phi}(x,M)=(\hat{T}_f\hat{\phi}(\cdot,M))(x).$$

从引理 4.1 和引理 4.6 知

$$G(x)=\phi(x,M)=\hat{\phi}(x,M)=\hat{T}_fG(x).$$

由此可见 $\hat{T}_f^nG(x)=G(x)$。但从本章 § 3 知

$$\lim_n\hat{T}_f^nG(x)=S(f^\infty,x),$$

故 $S(f^\infty,x)=G(x)$。这就证明了 Gittins 指标法则 $\varphi=f^\infty$ 是最优的．证毕．

剩下的问题是如何计算 Gittins 指标．从引理 4.2 知 Gittins 指标 $M_i(x_i)$ 满足方程

$$M(x_i)=(T_i\phi_i(\cdot,M(x_i)))(x_i),$$

即 $M(x_i)$满足下列方程

$$M=\int_{X_i}\left[R_i(x_i,y)-\beta\phi_i(y,M)\right]P(\mathrm{d}y|x_i,i).\quad(4.12)$$

如果方程(4.12)(未知数是 M)只有一个根，而且这个根能找出来，则 $M_i(x_i)$就找出来了．但是函数 $\phi_i(y,M)$ 一般难以求出，因而利用(4.12)来计算 $M_i(x_i)$不是容易的事．Gittins 指标的计算问题现在还没有很好解决，但在一些特殊情况下还是可以算的。

例4.1 设有 k 个地点（编号为$1,2,\cdots,k$），每个地点都可能有财宝。设地点 i 有财宝（价值 r_i 元)的概率是 $p_i(i=1,\cdots,k)$．若在地点 i 进行搜索，单位时间的花费是 C_i 元。如果在地点 i 有财宝，则单位时间内能找到该财宝的概率是 α_i，从而在单位时间内能得到的直接报酬是

$$R_i=\alpha_i p_i r_i-C_i \text{ 元}(i=1,\cdots,k).$$

我们考虑随时间的推移报酬有折扣的情形，折扣因子是 $\beta(0<\beta<1)$。每一步（每一步占有一个单位时间）只能在一个地点进行搜索，每过一个单位时间可再选一个地点进行搜索．试问：每一步应怎样选择地点进行搜索，使得总报酬 $\sum_{n=0}^{\tau-1}\beta^n R_{i_n}$ 的平均值达到最大(这里 i_n 是第 n 步进行搜索的地点（号码)，τ 是停止搜索的时刻)。

我们先把这个问题分析一下，然后把它归结为本节前面讲过的备择 Bandit 过程模型。

设地点 i 含有财宝（价值 r_i 元）的概率是 p_i，在这个地方搜索了单位时间后如果没有发现财宝，则根据贝叶斯定理知这地点有财宝的概率变为

$$p_i^*=\frac{p_i(1-\alpha_i)}{p_i(1-\alpha_i)+1-p_i},$$

如果发现了财宝，则这个地点有财宝的概率是 1．既然发现了财宝，则把财宝拿走，这个地点再含有财宝的概率变为零。换句话说，如果允许搜寻工作不断进行下去，而把每个地点含有财宝的概率看作是该地点的状态，则状态是不断转移的，一旦状态是1，

则下一步的状态便是 0，一旦状态是 0 则以后的状态全是 0。

有了这番分析之后，我们引进数学模型如下：

设 $A=\{1,2,\cdots,k\}$。当 $i\in A$ 时，令 $X_i=[0,1]$，$\mathscr{B}_i$ 为 $[0,1]$ 中全体 Borel 子集组成的 σ 代数。a_i 和 C_i 是正数 $(0<a_i<1)$，$i=1,2,\cdots,k$。设 $P(B|x_i,i)$ 是这样的转移函数：当 $x_i\in(0,1)$ 时，

$$P\left(\left\{\frac{x_i(1-a_i)}{x_i(1-a_i)+1-x_i}\right\}\Big|x_i,i\right)=x_i(1-a_i)+(1-x_i),$$

$$P(\{0\}|x_i,i)=x_ia_i;$$

当 $x_i=0$ 或 1 时，

$$P(\{0\}|x_i,i)=1.$$

报酬函数

$$R_i=R(x_i,i,y_i)=a_ix_ir_i-C_i(i-1,\cdots,k).$$

备择Bandit过程 $\{(X_i,P(\cdot|x_i,i),R_i,\beta),i\in A\}$ 便是我们的辅助数学模型。在我们的问题里还应考虑适当的时刻停止搜索.很明显，一旦在 k 个地方都先后找出了财宝就不应该再选择任何地点进行搜索了，故我们应同时考虑控制(选择)法则 φ 和停止法则 τ，这里 $\varphi=(\varphi_0,\varphi_1,\cdots)$，$\varphi_n$ 取值于 $A(n\geqslant0)$.每一对 (φ,τ) 就是我们的一个搜索方案。用 $x=(x_1,\cdots,x_k)$ 表示整个系统(k 个地点)的状态。若采用方案 (φ,τ)，开始时系统的状态是 $x=(P_1,\cdots,P_k)$，则平均总报酬为

$$S(\varphi,\tau),x)=E_x^{\varphi}\left(\sum_{n=0}^{\tau-1}\beta^nR_{\varphi_n}(x_{\varphi_n}(n),\varphi_n,x_{\varphi_n}(n+1))\right).\quad(4.13)$$

以下，当 $\tau\equiv\infty$ 时，将 $S((\varphi,\infty),x)$ 记作 $S(\varphi,x)$，这与本节前面不考虑停止法则时的记号在含义上是一致的。

我们要找出方案 (φ^*,τ^*) 满足：对一切方案 (φ,τ)，有

$$S((\varphi,\tau),x)\leqslant S((\varphi^*,\tau^*),x)(一切\ x\ ).$$

令

$$R_i^+=R^+(x_i,i,y_i)=(a_ir_ix_i-c_i)^+$$

$(i=1,2,\cdots,k)$，这里 $u^+=\max(u,0)$。我们来研究新的 Bandit 过

程族

$$\{(X_i, P(\cdot|x_i, i), R_i^+, \beta), i \in A\}.$$

我们要找出这个新模型的 Gittins 指标法则．注意，新老模型的差别仅在于报酬函数不同．

首先，来计算地点 i 的 Gittins 指标 $M_i(x_i)$。从(4.12)知

$$M_i(x_i) = R_i^+ + \beta\int_0^1 \phi_i(y, M_i(x_i))P(\mathrm{d}y|x_i, i). \quad (4.14)$$

记

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i(1-a_i)}{x_i(1-a_i)+1-x_i} (i=1,\cdots,k).$$

则 $x_i \in (0,1)$ 时，

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \phi_i(y, M_i(x_i))P(\mathrm{d}y|x_i, i) \\
&\quad = \phi_i(\tilde{x}_i, M_i(x_i)) \cdot [x_i(1-a_i)+1-x_i] \\
&\qquad + \phi_i(0, M_i(x_i))x_i a_i \\
&\quad \leqslant \phi_i(x_i, M_i(x_i))[x_i(1-a_i)+(1-x_i)] \\
&\qquad + \phi_i(x_i, M_i(x_i))x_i a_i \\
&\quad = M_i(x_i),
\end{aligned}$$

从(4.14)知

$$M_i(x_i) \leqslant R_i^+ + \beta M_i(x_i).$$

当 $x_i = 0$ 或 1 时，

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \phi_i(y, M_i(x_i))P(\mathrm{d}y|x_i, i) \\
&\quad = \phi_i(0, M_i(x_i)) \leqslant \phi_i(x_i, M_i(x_i)) = M_i(x_i).
\end{aligned}$$

从(4.14)知仍有

$$M_i(x_i) \leqslant R_i^+ + \beta M_i(x_i).$$

另一方面，

$$\phi_i(y, M_i(x_i)) \geqslant M_i(x_i),$$

于是从(4.14)知

$$M_i(x_i) \geqslant R_i^* + \beta M_i(x_i),$$

从而 $M_i(x_i) = R_i^* + \beta M_i(x_i)$，

$$M_i(x_i) = \frac{(a_i x_i r_i - c_i)^+}{1-\beta} \quad (i=1,\cdots,k).$$

令

$$\varphi_n^* = \min\{i;\ M_i(x_i(n)) = \max_{1\leqslant j\leqslant k} M_j(x_j(n))\},$$

这里 $n\geqslant 0$，$x_j(n)$ 是地点 j 在第 n 步时的“状态”，即该地点在第 n 步时含有财宝的概率。易知，对一切 $n\geqslant 0$，

$$\varphi_n^* = \min\{i;\ 1\leqslant i\leqslant k, (a_i r_i x_i(n) - C_i)^+ = \max_{1\leqslant j\leqslant k} (a_j r_j x_j(n) - C_j)^+\}.$$

有了 φ_n^*，就得到了 Gittins 指标法则 $\varphi^* \triangleq (\varphi_0^*, \varphi_1^*, \cdots)$。令

$$\tau^* = \inf\{n;\ a_{\varphi_n^*} r_{\varphi_n^*} x_{\varphi_n^*}(n) \leqslant C_{\varphi_n^*}\}.$$

我们指出，(φ^*, τ^*) 便是最好的搜索方案，这里 φ^* 是选择法则（控制法则），τ^* 是停止法则。实际上，若 (φ, τ) 是任一方案，则

$$\begin{aligned}
S((\varphi,\tau),x) &= E_x^{\varphi}\left(\sum_{n=0}^{\tau-1} \beta^n R(x_{\varphi_n}(n), \varphi_n, x_{\varphi_n}(n+1))\right) \\
&\leqslant E_x^{\varphi}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n R^+(x_{\varphi_n}(n), \varphi_n, x_{\varphi_n}(n+1))\right) \\
&\leqslant E_x^{\varphi^*}\left(\sum_{n=0}^{\tau} \beta^n R^+(x_{\varphi_n^*}(n), \varphi_n^*, x_{\varphi_n^*}(n+1))\right) \\
&= E_x^{\varphi^*}\left(\sum_{n=0}^{\tau-1} \beta^n R(x_{\varphi_n^*}, \varphi_n^*, x_{\varphi_n^*}(n+1))\right) \\
&= S((\varphi^*, \tau^*), x).
\end{aligned}$$

这就证明了 (φ^*, τ^*) 的最优性。换句话说，最优方案是每步都选眼前利益最大的地点进行搜索，一旦各地都无利可图就不再搜索下去了。

读者可从 Gittins(1979) 和 Whittle(1982) 中看到备择 Bandit 过程的其它例子。至于 Bandit 过程的更全面的知识，应参看 Gittins(1989)。

参考文献

[1] Anderson, T.W. (1960), A modification of the sequential probability ratio test to reduce the sample size, Ann. Math. Statist. 31, 165—197.

[2] Bechhofer, R.E. (1954), A single-sample multiple decision procedure for ranking means of normal populations with known variables, Ann. Math. Statist. 25, 16—39.

[3] Bechhofer, R.E. and Kulkarni, R.V. (1982), Closed adaptive sequential procedures for selecting the best of K≥2 Bernoulli populations, statistical decision theory and related topics Ⅲ. Vol. 1, 61—107.

[4] Berger, J. (1980), Statistical decision theory, Springer-Verlag.

[5] Berk, R.H., Brown, L.D. and Cohen, A. (1981), Bounded stopping times for a class of sequential Bayes tests, Ann. Statist. 9, 831—845.

[6] Blackwell, D. (1965), Discounted dynamic programming, Ann.Math. Statist. 36, 226—235.

[7] Büringer, H., Martin, H. and Schriever, K-H. (1980), Nonparametric sequential selection procedures, printed in U.S.A.

[8] Cabilio, P. (1977), Sequential estimation in Bernoulli trials, Ann. Statist. 5, 342—356.

[9] 陈翰馥(1981)，《递推估计》，科学出版社.

[10] 陈家鼎(1983)，关于贝叶斯判决的存在性条件，《应用数学学报》，第六卷第三期，367—375.

[11] 陈家鼎（1985），未知方差时正态分布均值的某些功效是一的检验的渐近最优性，《中国科学》（A辑），第六期，514—524.

[12] 陈家鼎、李向科（1986），一类最优停止问题的解，《应用概率统计》，第二卷第一期，13—20。

[13] 陈家鼎（1987），一类随机过程的最优序贯检验的唯一性，《数学季刊》，第二期，16—33。

[14] 陈家鼎（1989），残存分析（北京大学油印讲义）。

[15] 陈家鼎（1990），一类截尾序贯检验的渐近最优性，《中国科学》（A辑），第八期，792—802。

[16] 陈家鼎（1992），一类渐近最优的序贯检验，北京大学技术报告。

[17] 陈希孺（1981），《数理统计引论》，科学出版社。

[18] Chow, Y.S., Robbins, H. and Siegmund, D.(1971), Great Expectations, The theory of optimal stopping, Houghton-Mifflin (有中译本:《最优停止理论》, 1983).

[19] Chow, Y.S. and Teicher, H. (1978), Probability theory, Springer-Verlag.

[20] Cohen, A. and Samuel Cahn. (1982), Necessary and sufficient conditions for bounded stopping time of sequential Bayes tests in one parameter exponential families, Commun. Statist. Sequential analysis. 1, 89—99.

[21] Darling, D.A. and Robbins, H. (1967), Iterated logrithm inequalities, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 57, 1188—1192.

[22] Darling, D.A. and Robbins, H. (1968), Some further remarks on inequalities for sample sums, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 60, 1175—1182.

[23] De Groot, M.H. (1970), Optimal statistical decisions, McGraw-Hill.

[24] Dvoretzky, A. (1956), on stochastic approximation, Proc. third Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob. 1, 39—55.

[25] ДЫНКИН, Е.Б. (1963), оптимальный выбор

моментa остановки марковского процесса. ДАН. СССР, Т.150, No.2.

[26] ДЫНКИН, Е.Б.И ЮЩКЕВИЧ, А. А. (1975). управляемые процессы маркова. москва.

[27] 董泽清 (1981)，马尔可夫决策规划（油印本）.

[28] Eichhorn, B.H. (1972), Sequential search of an optimal dosage for cases of linear dosage-toxicity regression. Tech. Report. No.9. Dept. of Math. and stat., case western Resere university.

[29] ФАДЕЕВ, А.Г. (Fakejev, A.G.), (1970), On optimal stopping of random processes with continous time, Teoria verojatn. i. Primenen. 15, 336—341.

[30] Feller, W. (1946) , The law of the iterated logarithm for identically distributed random variables, Ann. of Math. 47, 631—638.

[31] Ferguson, T. (1967) , Mathematical statistics: A decision theoretic approach, Academic Press, New York.

[32] Ferguson, T. (1976) , Stopping a sum during a success run, Ann. statist. 4, 252—264.

[33] Gardener, M. (1960) . Mathematical games, Sci. Amer. Vol. 202, No.1, 150—156, No.3, 172—182.

[34] Ghosh, B.K. (1970) , Sequential tests of statistical hypotheses, Addison Wesley.

[35] Ghosh, B.K. and Sen, P.K. (1991) , Handbook of Sequential Analysis, Marcel Dekker, Inc.

[36] ГИХМАН, И.И. И СКОРОХОД, А. Б. (1977), управляемые случайные прочессы. МОСКВА.

[37] Gittins, J.C. (1979), Bandit process and dynamic allocation indices, J.R.S.S. series B, 41, 148 177.

[38] Gittins, J.C. (1989),Multi-armed Bandit Allocation Indices. Wiley.

[39] Гладышев, Е. Г. (1965). О стохастической аппроксимачии, Теор. Веря. и её прим. Т. 10, 297—300.

[40] Govindarajulu, Z. (1981), Sequential statistical procedures, Acad. Press.

[41] Gupta, S.S. and Panchapakesan, S. (1979).Multiple decision procedures, John Wiley and sons.

[42] Hoffding, W. (1960), Lower bounds for the expected sample size and average risk of a sequential procedures, Ann. Math. Stat. 31, 352—368.

[43] Howard, R.A. (1960), Dymamic Programming and Markov Processes (有中译本:《动态规划与马尔可夫过程》, 1963).

[44] Huffman, M.D. (1983), An efficient approximate solution to the Kiefer-Weiss Problem, Ann.Statist. 11, 306—316.

[45] Irle, A. and Schmitz, N. (1984), On the optimality of the SPRT for processes with continuous time parameter, Math. Oper. Statist. 15, 91—104.

[46] Kiefer, J. and weiss, L. (1957), Some properties of generalized sequential probability ratio tests, Ann. Math. statist. 28, 57—75.

[47] Kiefer, J. and Wolfowitz, J. (1952), Stochastic estimation of the maximum of a regression function, Ann. Math. Statist. 23, 462—466.

[48] Kuratowski, K. and Mostowski, A. (1976), Set theory, North-Holland Publ. Comp.

[49] Lai, T.L. (1971), Confidence sequences and martingales, Ph.D. dissertation, Colnmbia Univ.

[50] Lai, T.L. (1976), On Confidene Sequences, Ann. Statist. 4, 265—280.

[51] Lai, T.L. (1977), Tests based on Sample Sum,

Ann. Statist. 5, 856—880.
[52] Lai, T.L. and Robbins, H.(1979), Adaptive design and stochastic approximation, Ann. statist. 7, 1196—1221.
[53] Lai, T.L. (1981), Asymptotic optimality of invariant sequential probability ratio tests, Ann.statist. 9, 318—333.
[54] Lai, T.L (1988), Nearly optimal sequential tests of Composite hypotheses, Ann. statist.16, 856—886.
[55] Lai, T.L. and Robbins, H. (1985), Asymptotically efficient adaptive allocation rules, Adv. in appli. Math., 6, 4—22.
[56] Lehmann, E.L. (1959), Testing statistical hypotheses, John Wiley.
[57] 刘力平 (1991)，一个时间序贯问题的贝叶斯解的存在性，北京大学技术报告。
[58] Lorden, G. (1970), On excess over the boundary, Ann. Math. Statist. 41, 520—527.
[59] Lorden, G. (1976), 2-SPRT'S and the modified Kiefer-Weiss Problem of minimizing an expected sample size, Ann. statist. 4, 281—291.
[60] Lorden, G. (1980), Structure of sequential tests minimizing an expected sample size, Z.Wahrschein. 51, 291—302.
[61] Mukhopadhyay, N. (1988), Sequential estimation problems for negative exponential populations, Commun. Statist., A 17, 2471—2506.
[62] Pocock, S.J. (1977), Group sequential methods in the design and analysis of clinical trials, Biometrika 64, 191—199.
[63] Ray, S.N. (1965), Bonnds on maximum sample size of a Bayes sequential Procedure, Ann. Math. Sta-

tist. 36, 859—878.

[64] Robbins, H. and Monro, S. (1951). A stochastic approximation method, Ann. Math. Statist. 22, 400—407.

[65] Robbins, H. (1952). Some aspects of sequential design of experiment, Bull. Amer. Math. Soc. 58, 527—535.

[66] Robbins, H. (1970), Statistical methods related to the law of the iterated logarithm, Ann. Math. Statist. 41, 1397—1409.

[67] Siegmund, D. (1977), Repeated Significance tests for a normal mean, *Biometrika*, 64, 177—189.

[68] Siegmund, D. (1985), Sequential analysis, Springer-Verlag.

[69] ЩИРЯЕВ, А.Н. (1976), Статистический последовательный анализ, МОСКВА.

[70] Simons, G. (1968). On the Cost of not knowing the variance when making a fixed-width confidence interval for the means, Ann. Math. Statist. 39, 1946—1952.

[71] Snell, J. (1952), Application of martingale system theorems, Tran. Amer. Math. Soc., 73, 293—512.

[72] Stout, W.F. (1974), Almost sure convergence, New York, Acad. pre.

[73] 孙嘉阳 (1986), 带有讨厌参数的multi-armed bandit问题,《中国科学》(A辑), 第二期, 124—134.

[74] Thompson, M.E. (1971), Continous Parameter Optimal Stopping Problems, Z. Wahrschein. 19, 302—318.

[75] Van Hee, K.M. (1978), Bayesian Control of Markov Chains, Amsterdem.

[76] Wald, A. (1947), Sequential analysis, John Wiley.

[77] Wald, A. and Wolfowitz, J. (1948). Optimal Character of the sequential probability ratio test, Ann. Math. Statist. 19, 326—339.

[78] 王梓坤 (1965), 《随机过程论》, 科学出版社.

[79] Wetherill, G. (1986), Sequential methods in Statistics, Printed in Great Britain.

[80] Whittle, P. (1980), Multi-armed bandits and the Gittins index, J.R.S.S. Ser. B. 42, 143—149.

[81] Whittle, P. (1982, 1983), Optimization over time, Vol. Ⅰ and Ⅱ, John Wiley.

[82] Wolfowitz, J. (1947), Efficiency of sequential estimates and wald's equation for sequential processes, Ann. Math. Statist. 18, 215—230.

[83] Woodroofe, M. (1982), Nonlinear renewal theory in sequential analysis, Soc. for indust. and appli. math., Philadelphia.

[84] 薛行鸿 (1985), 最优序贯决策的唯一性, 《中国科学》(A辑), 第七期, 584—595.

[85] 赵彭亮 (1986), 连续时间随机过程的最优停止理论, 《数学季刊》, 第二期, 69—80.